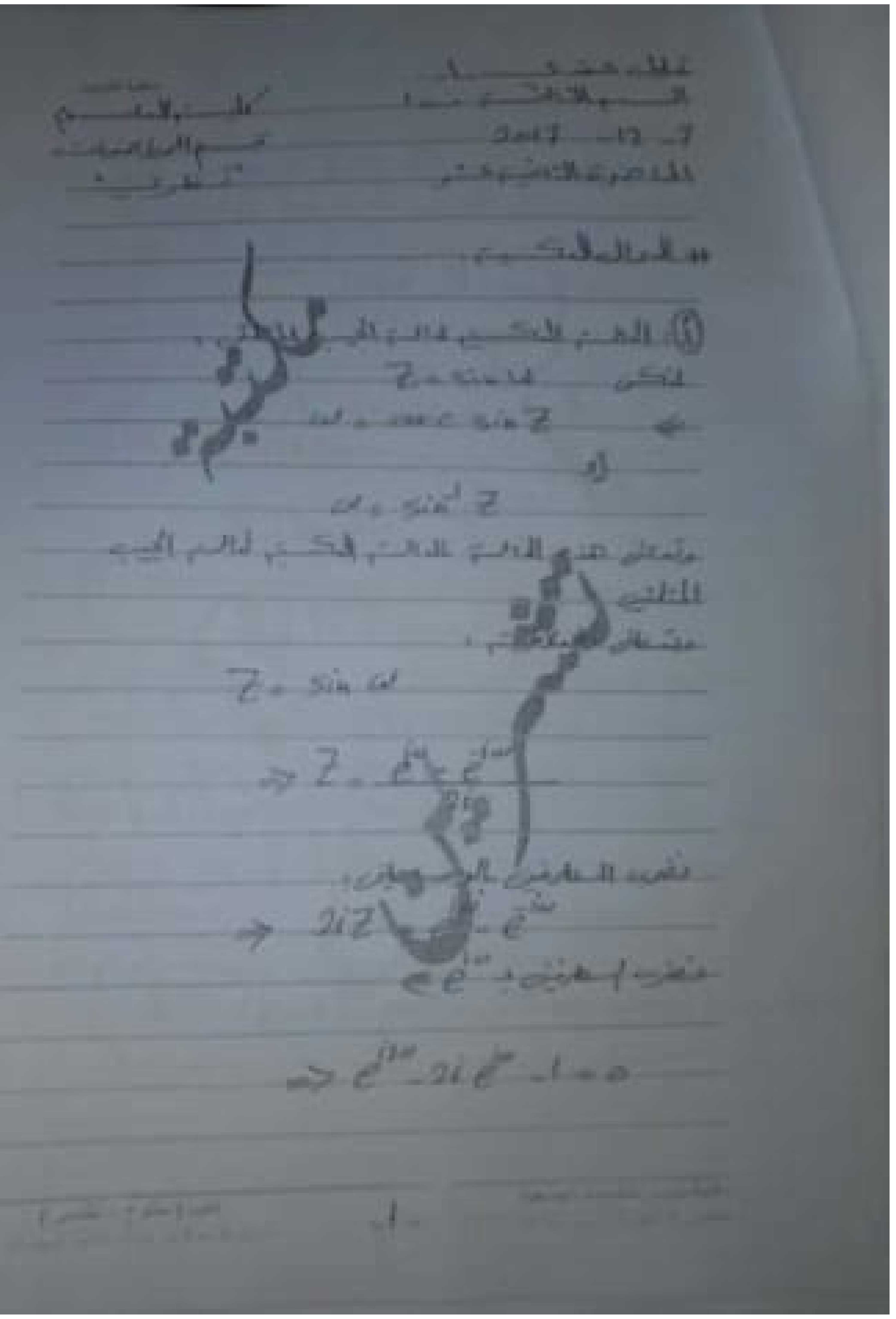
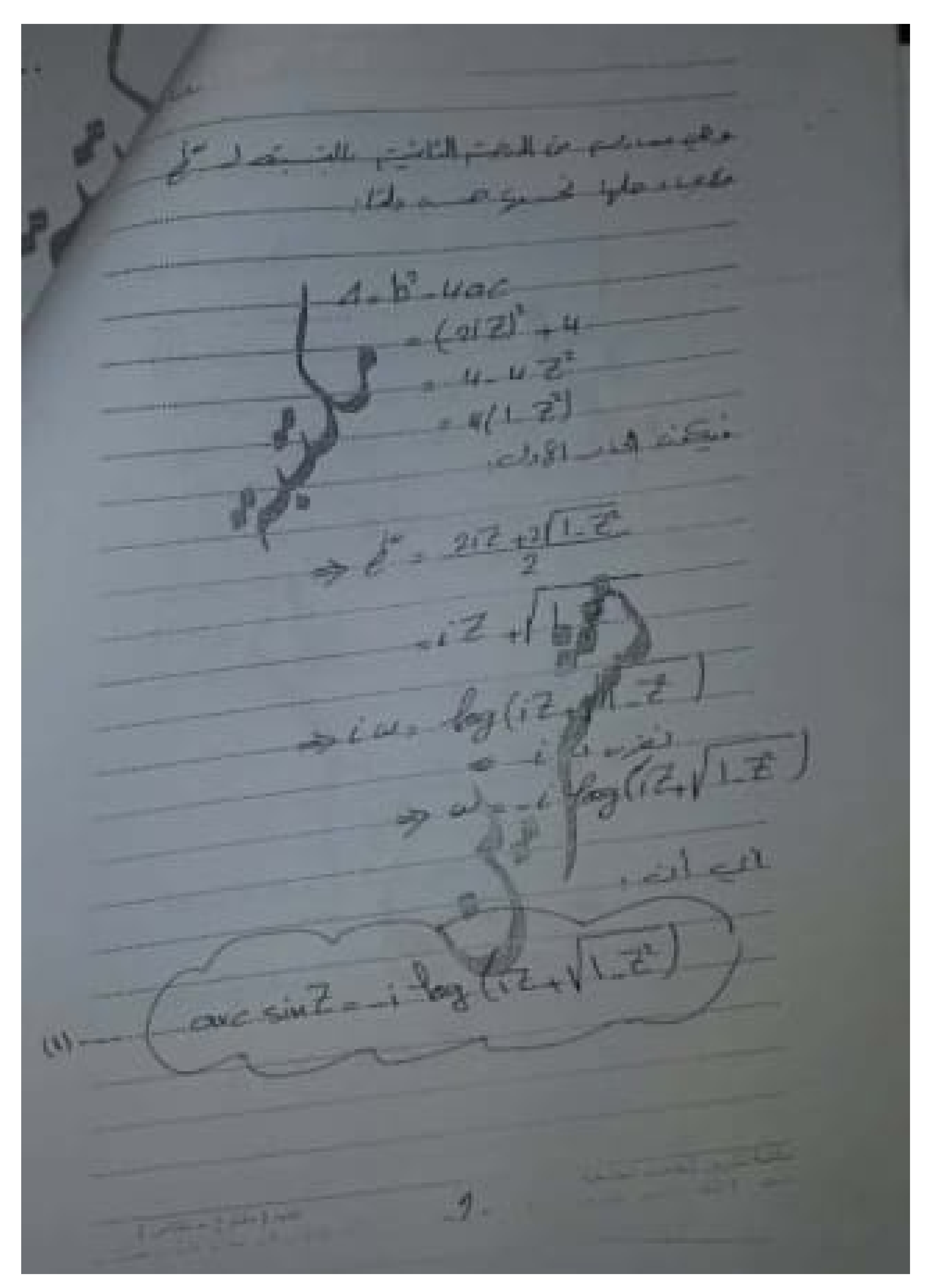




$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (2iZ)^2 + 4$

$= 4 - 4Z^2$

$= 4(1 - Z^2)$

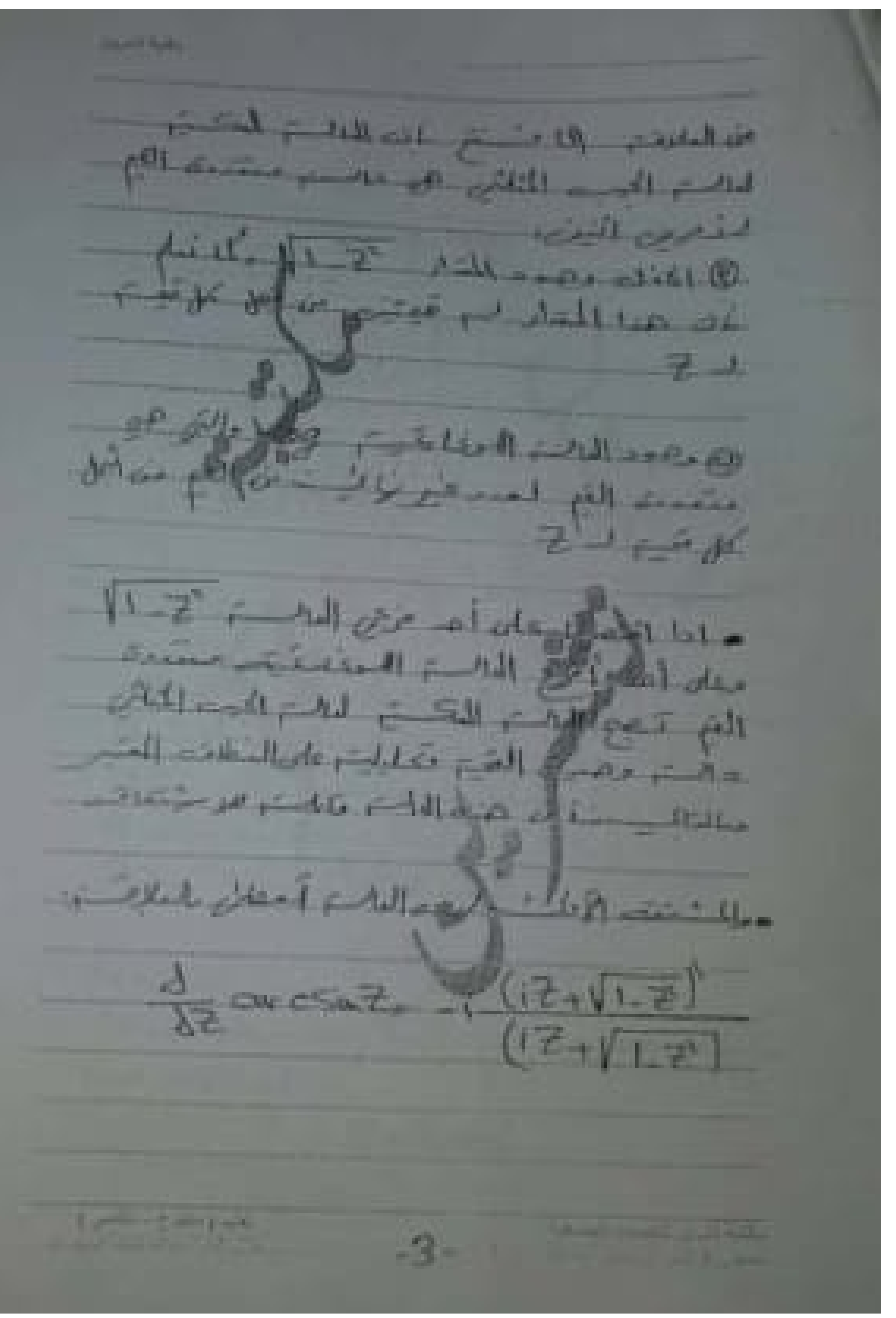
$\Rightarrow e^{iw} = \frac{2iZ \pm 2\sqrt{1 - Z^2}}{2}$

$= iZ + \sqrt{1 - Z^2}$

$\Rightarrow iw = \log(iZ + \sqrt{1 - Z^2})$

$\Rightarrow w = -i \log(iZ + \sqrt{1 - Z^2})$

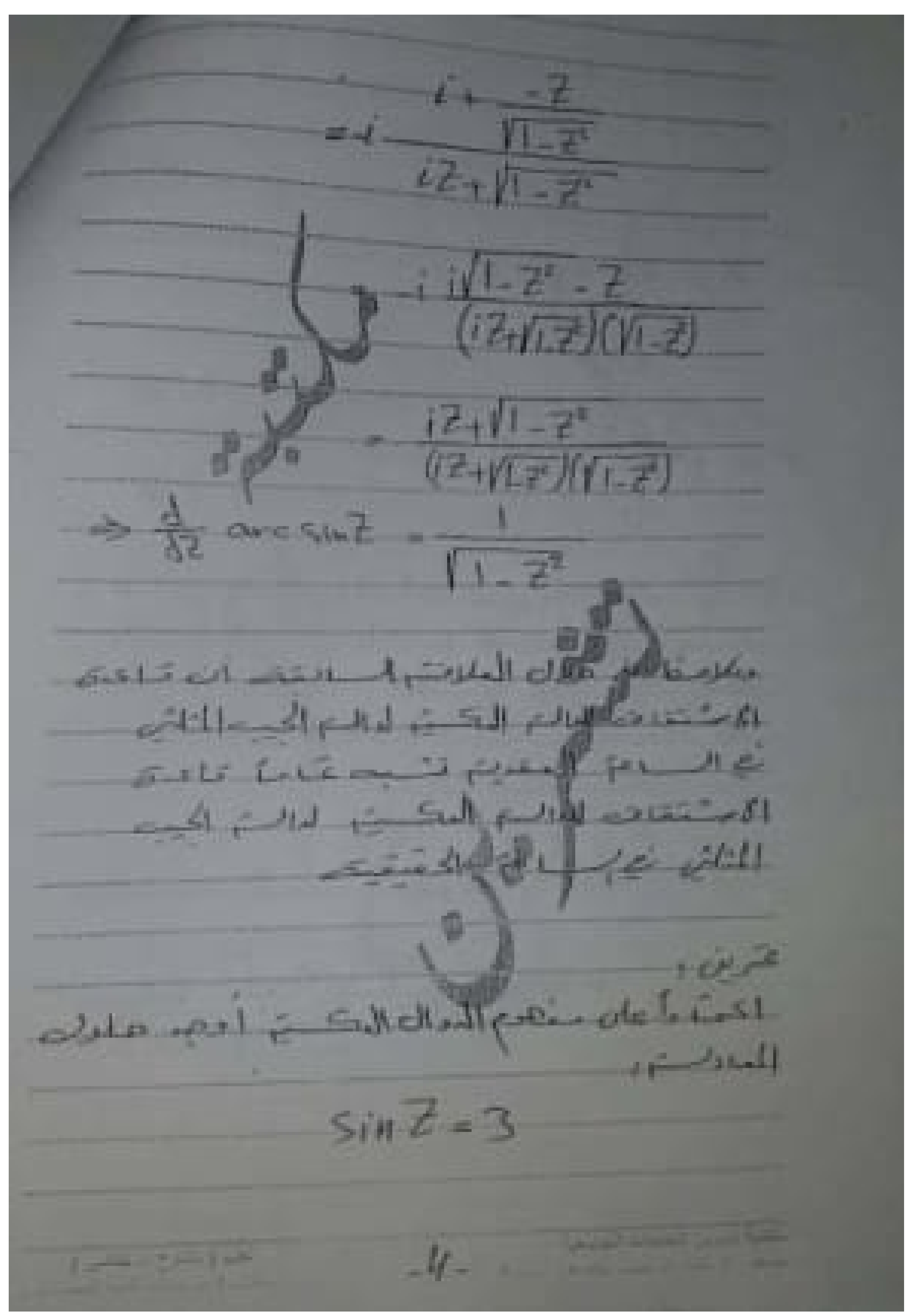
(1) —— $\arcsin Z = -i \log(iZ + \sqrt{1 - Z^2})$



$\sqrt{1-z^2}$

$\sqrt{1-z^2}$

$$\frac{d}{dz}\arcsin z = -i\,\frac{\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)'}{\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)}$$



$$= i\,\frac{i + \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}}{iz + \sqrt{1-z^2}}$$

$$= i\,\frac{i\sqrt{1-z^2} - z}{\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\left(\sqrt{1-z^2}\right)}$$

$$= \frac{iz+\sqrt{1-z^2}}{\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\left(\sqrt{1-z^2}\right)}$$

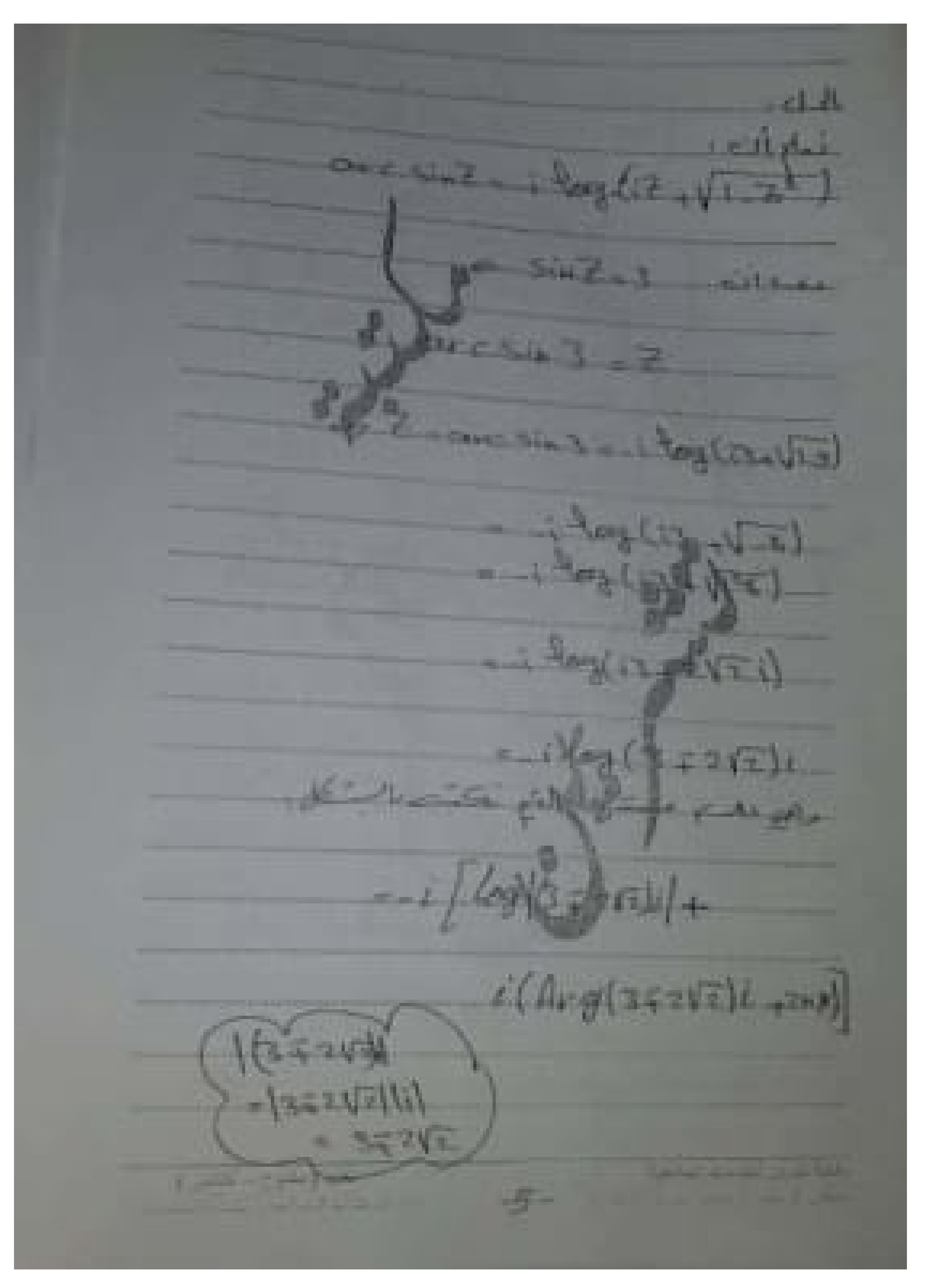
$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\arcsin z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

ملاحظة: من خلال الملاحظة السابقة نستنتج أن قاعدة الاشتقاق للدالة العكسية لدالة الجيب المثلثي في المستوى المعقد تشبه تماماً قاعدة الاشتقاق للدالة العكسية لدالة الجيب المثلثي في المستوى الحقيقي

تمرين:

اعتماداً على مفهوم الدالة العكسية أوجد حلول المعادلة:

$$\sin z = 3$$



مثال :

الحل :

$\arcsin z = -i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$

$\sin z = 3$ حيث

$\arcsin 3 = z$

$\arcsin 3 = -i \log\left(3i \pm \sqrt{1-9}\right)$

$= -i \log\left(3i \pm \sqrt{-8}\right)$

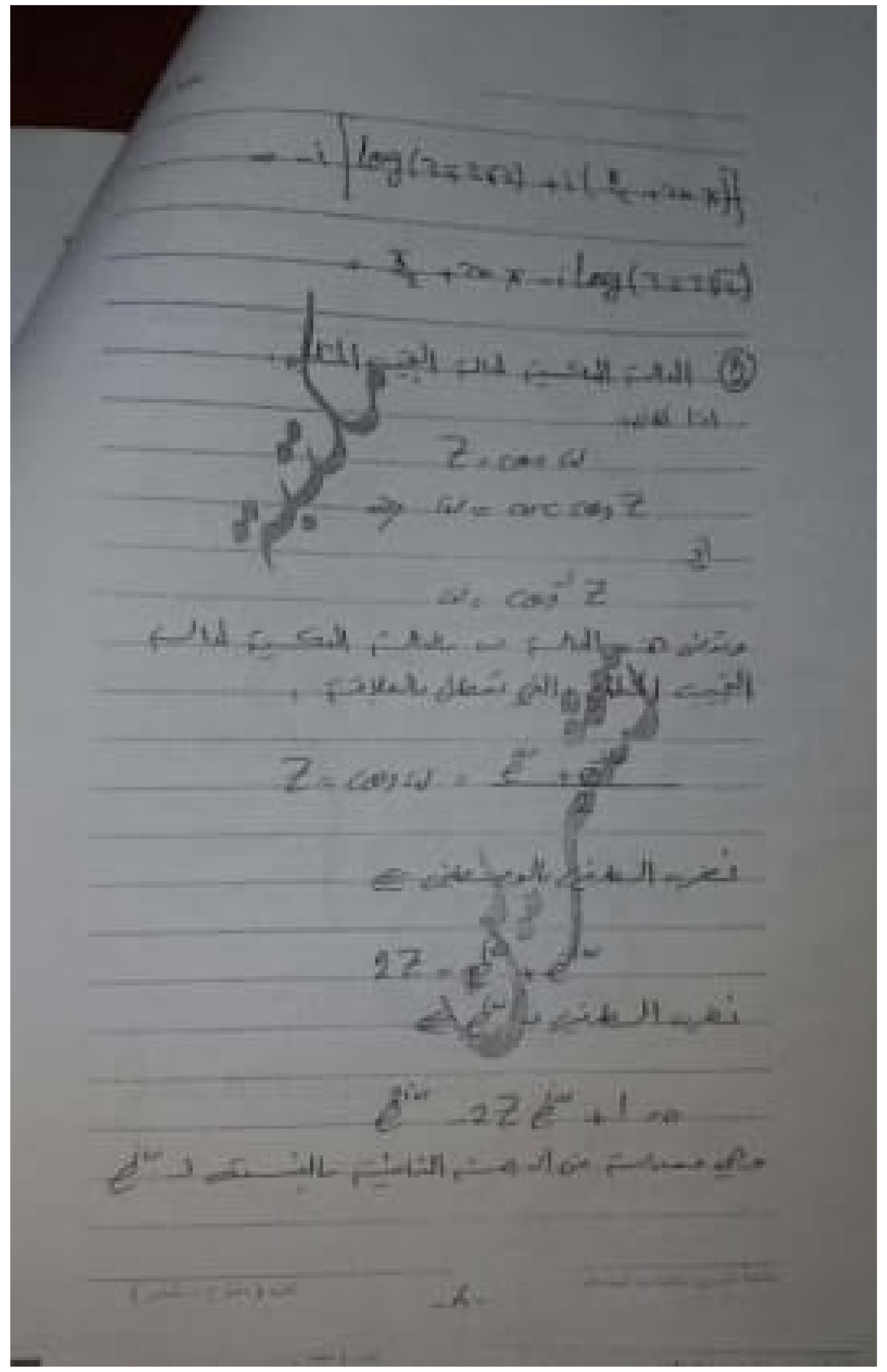
$= -i \log\left(3i \pm 2\sqrt{2}\, i\right)$

$= -i \log\left((3 \pm 2\sqrt{2})\, i\right)$

[illegible]

$= -i \left[\log\left|(3 \pm 2\sqrt{2})\, i\right| + i\left(\mathrm{Arg}\left((3 \pm 2\sqrt{2})\, i\right) + 2n\pi\right) \right]$

$|(3 \pm 2\sqrt{2})\, i|$
$= |3 \pm 2\sqrt{2}|\,|i|$
$= 3 \pm 2\sqrt{2}$



$= -i\{\log(z \pm \sqrt{z^2-1}) + i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\}$

$= \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i\log(z \pm \sqrt{z^2-1})$

(6) الدالة العكسية لدالة الجيب تمام

اذا كانت

$z = \cos w$

$\Rightarrow w = \arc\cos z$

أو

$w = \cos^{-1} z$

ويمكن الحصول على معكوس الدالة العكسية لدالة الجيب تمام التي تحقق العلاقة :

$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$

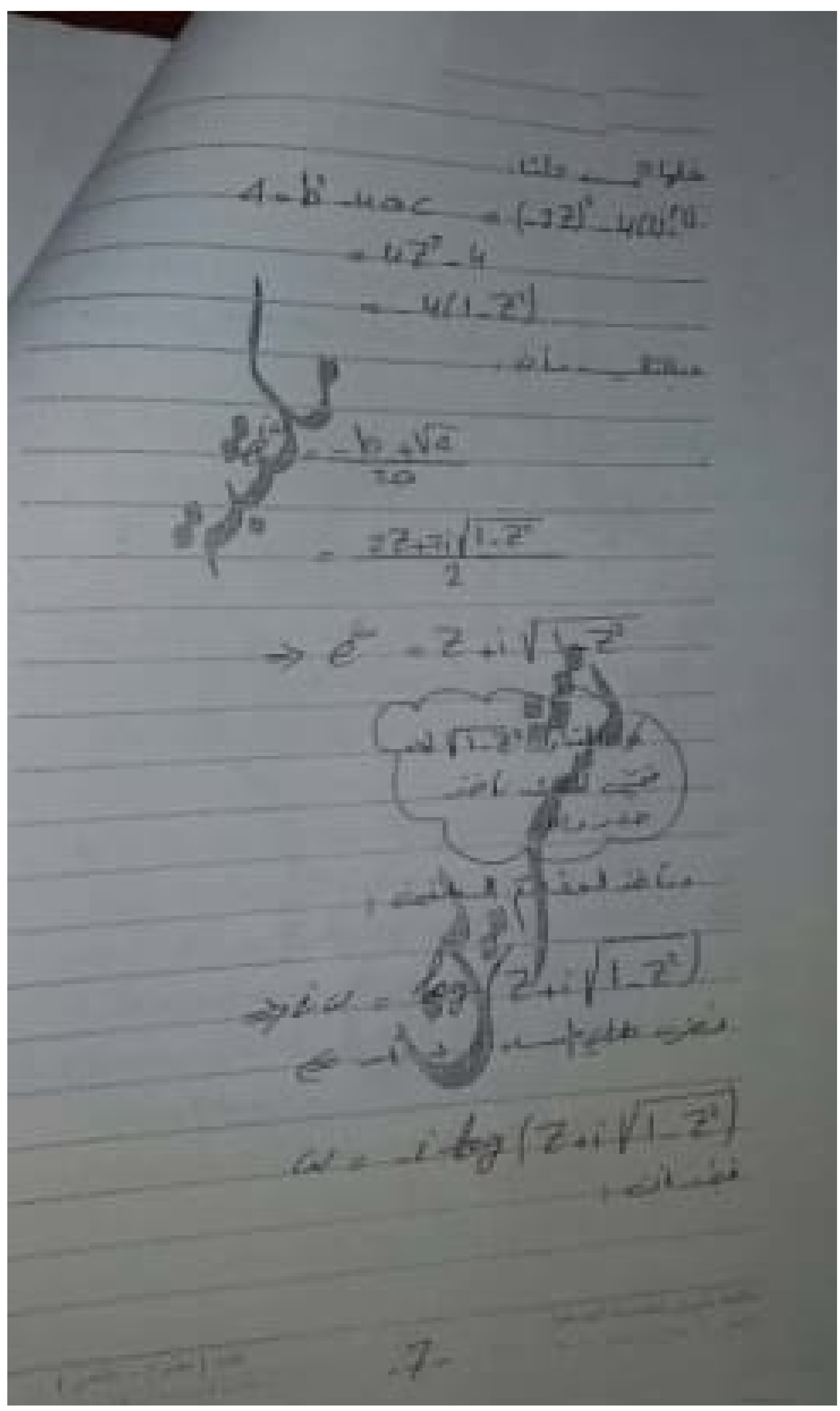
نضرب الطرفين في 2

$2z = e^{iw} + e^{-iw}$

نضرب الطرفين في e^{iw}

ومنه $2z\, e^{iw} = e^{2iw} + 1$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ e^{iw}



$\Delta = b^2 - 4ac = (-2z)^2 - 4(1)(1)$

$= 4z^2 - 4$

$= 4(1 - z^2)$

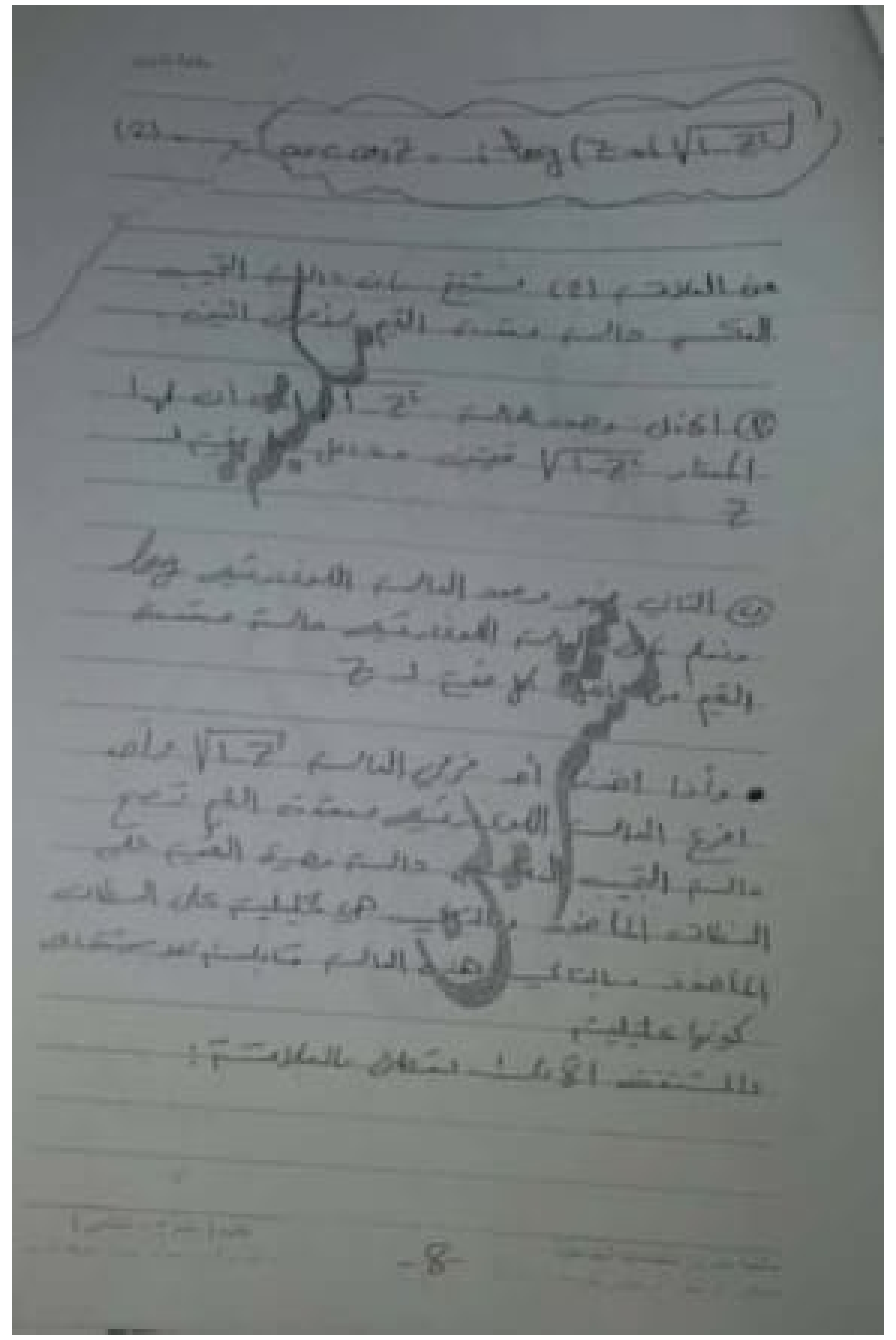
$e^{iw} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{2z \pm 2i\sqrt{1-z^2}}{2}$

$\Rightarrow e^{iw} = z + i\sqrt{1-z^2}$

$\Rightarrow iw = \log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)$

$w = -i \log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)$



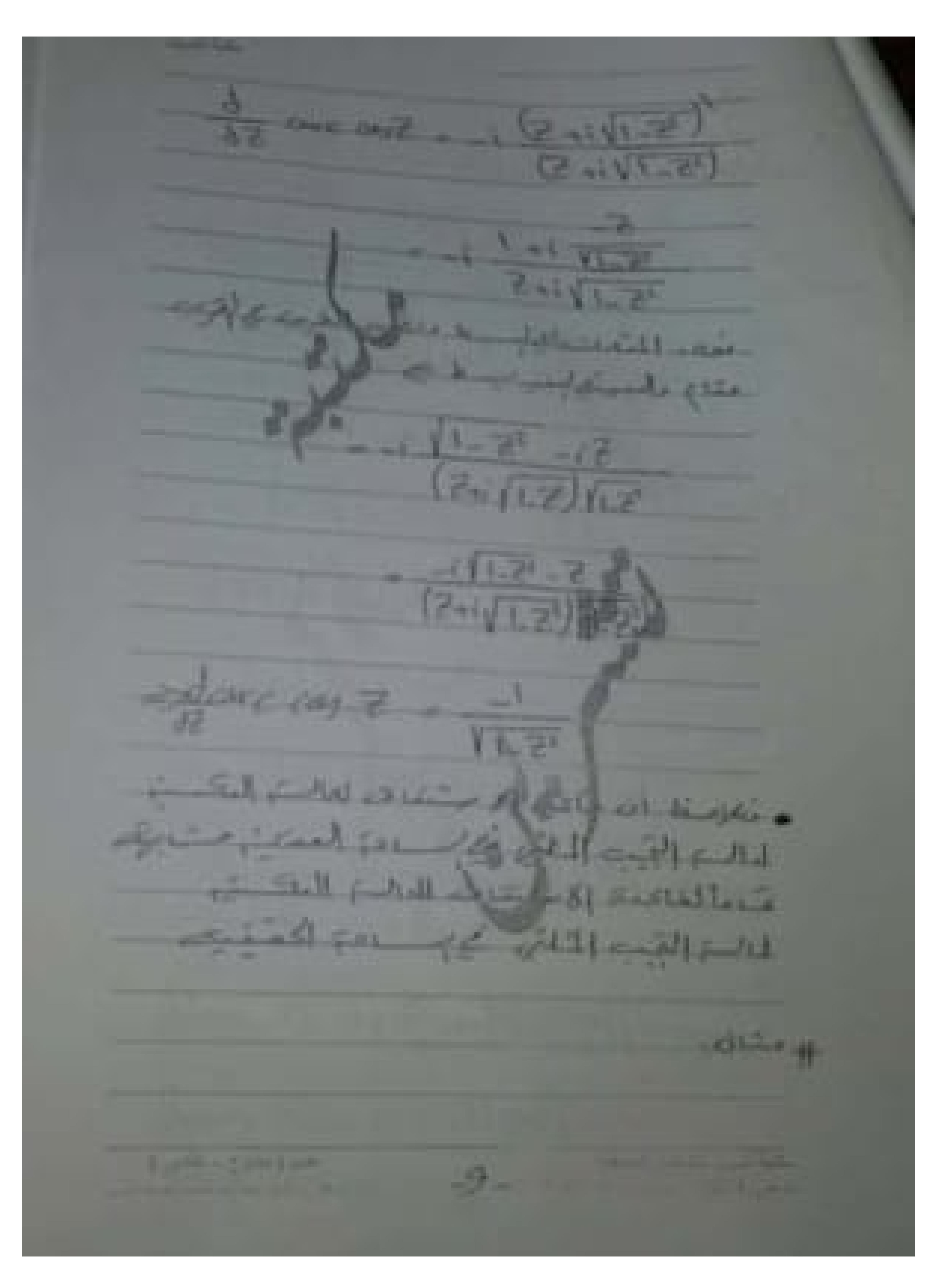
$$\arccos z = -i \log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right) \quad (2)$$

من العلاقة (2) نستنتج أن الدالة [illegible] العكسية دالة متعددة القيم [illegible]

① الأول [illegible] $\sqrt{1-z^2}$ [illegible]
$\sqrt{1-z^2}$ [illegible]
z

② الثاني [illegible] من الدالة اللوغاريتمية log [illegible] دالة متعددة القيم من أجل كل قيمة لـ z

• وإذا أضفنا أن [illegible] الدالة $\sqrt{1-z^2}$ [illegible]
فرع الدالة [illegible] متعددة القيم [illegible]
الدالة [illegible] دالة [illegible]
[illegible] هي تحليلية على [illegible]
[illegible] هذه الدالة [illegible]
كونها تحليلية
[illegible] الآن [illegible] العلاقة :



$$\frac{d}{dz}\cos^{-1} z = -i\,\frac{\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)'}{\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)}$$

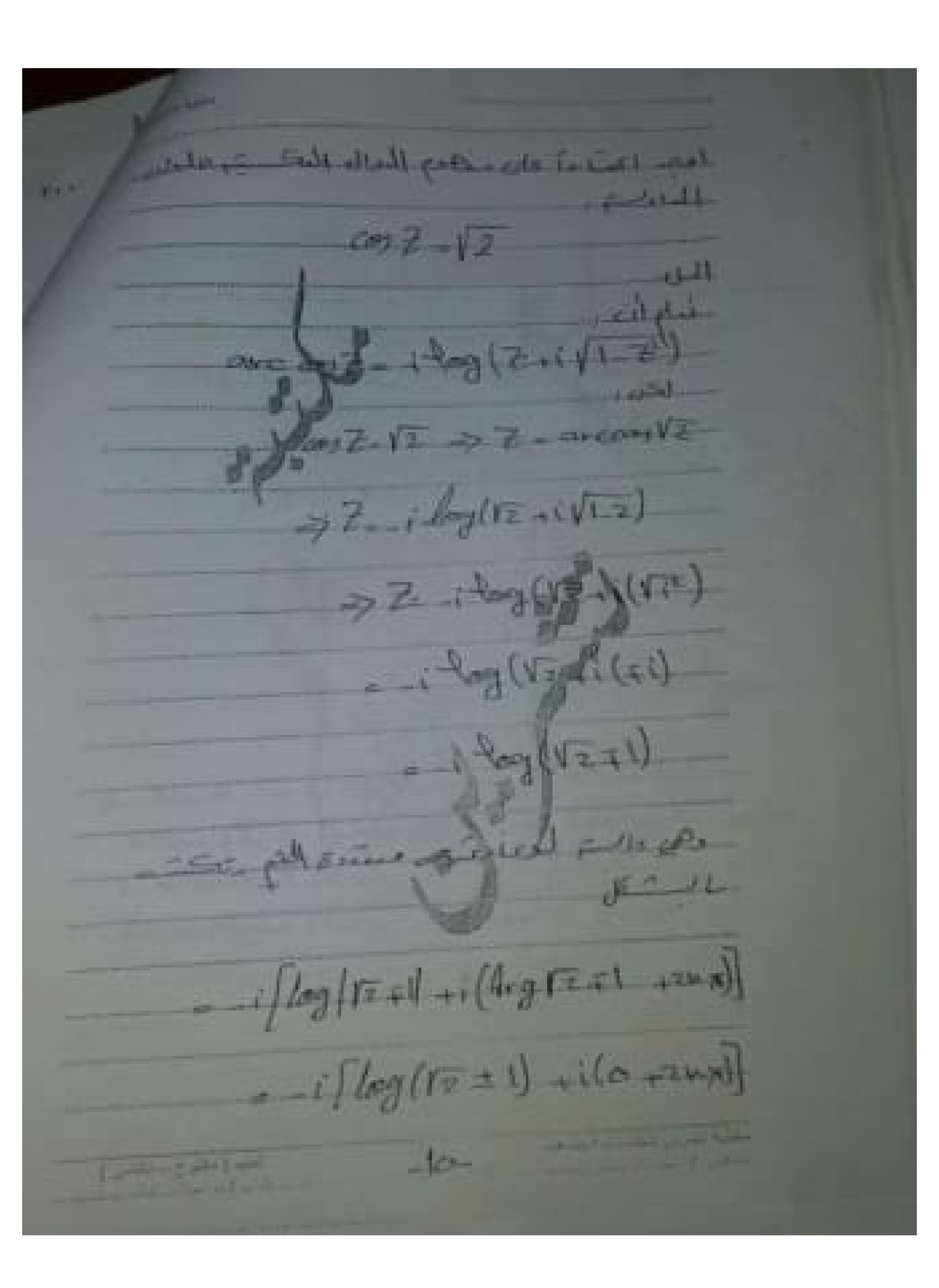
$$= -i\,\frac{1 + i\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}}{z + i\sqrt{1-z^2}}$$

$$= -i\,\frac{\sqrt{1-z^2} - iz}{\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \frac{-i\sqrt{1-z^2} + z}{\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}\cos^{-1} z = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$$

\# مثال:



أوجد الحل العام باستخدام الدالة العكسية للمعادلة
التالية:

$$\cos z = \sqrt{2}$$

الحل

نعلم أن

$$\arccos z = -i \log\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right)$$

لدينا

$$\cos z = \sqrt{2} \Rightarrow z = \arccos \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow z = -i \log\left(\sqrt{2} + i\sqrt{1-2}\right)$$

$$\Rightarrow z = -i \log\left(\sqrt{2} + i\sqrt{i^2}\right)$$

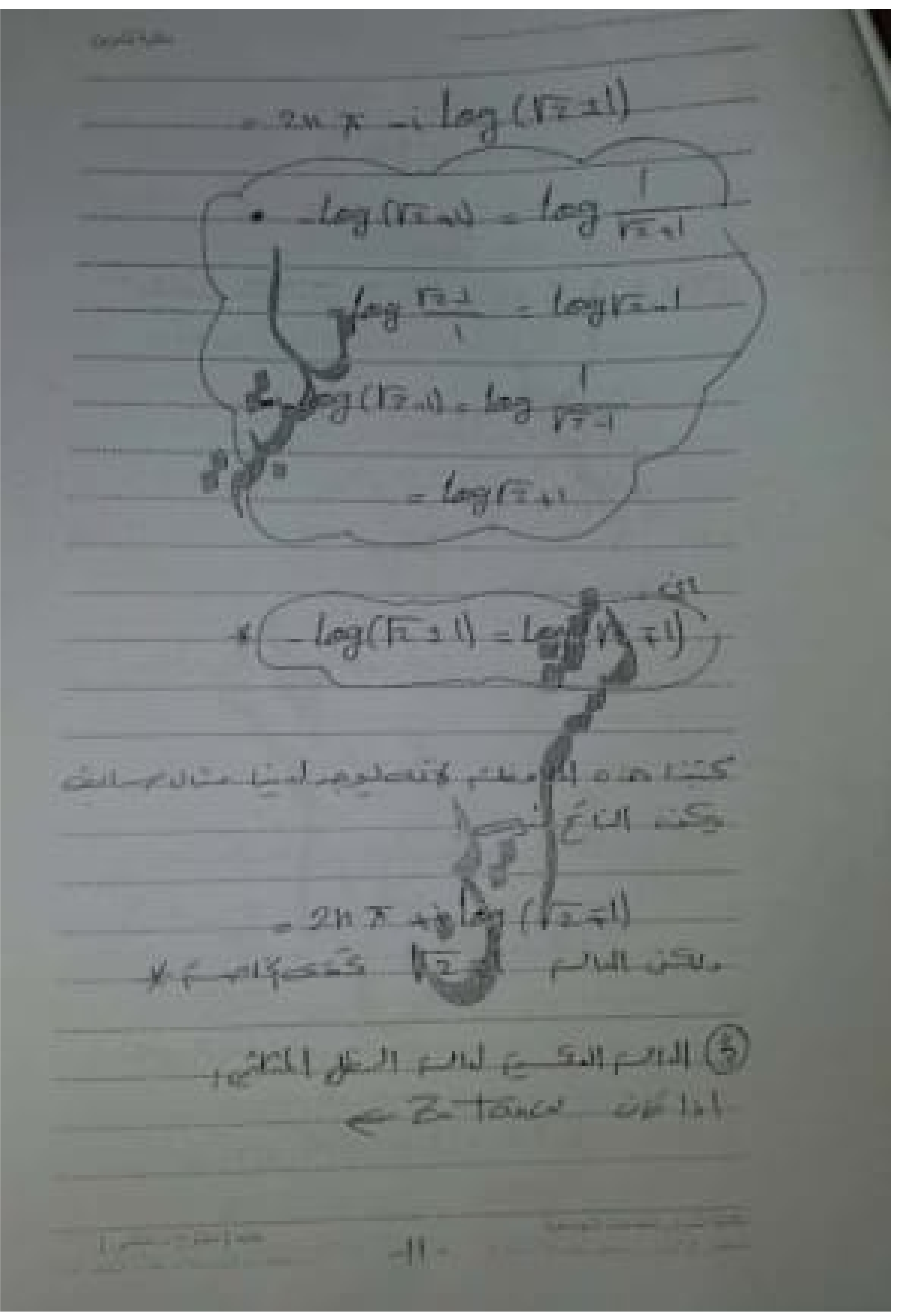
$$= -i \log\left(\sqrt{2} + i(\mp i)\right)$$

$$= -i \log\left(\sqrt{2} \mp 1\right)$$

وهي عبارة عن لوغاريتم [illegible] موجب [illegible] تكتب
بالشكل

$$= -i\left[\log|\sqrt{2} \mp 1| + i\left(\operatorname{Arg}(\sqrt{2} \mp 1) + 2n\pi\right)\right]$$

$$= -i\left[\log(\sqrt{2} \pm 1) + i(0 + 2n\pi)\right]$$



$= 2n\pi - i\log(\sqrt{2} \pm 1)$

$\bullet\ -\log(\sqrt{2} \pm 1) = \log\frac{1}{\sqrt{2} \pm 1}$

$\log\frac{\sqrt{2} \mp 1}{1} = \log(\sqrt{2} \mp 1)$

$\log(\sqrt{2} \mp 1) = \log\frac{1}{\sqrt{2} \pm 1}$

$= \log(\sqrt{2} \pm 1)$

$* \ -\log(\sqrt{2} \pm 1) = \log(\sqrt{2} \mp 1)$

كتبنا هذه الخطوة لأن اللوغاريتم ...

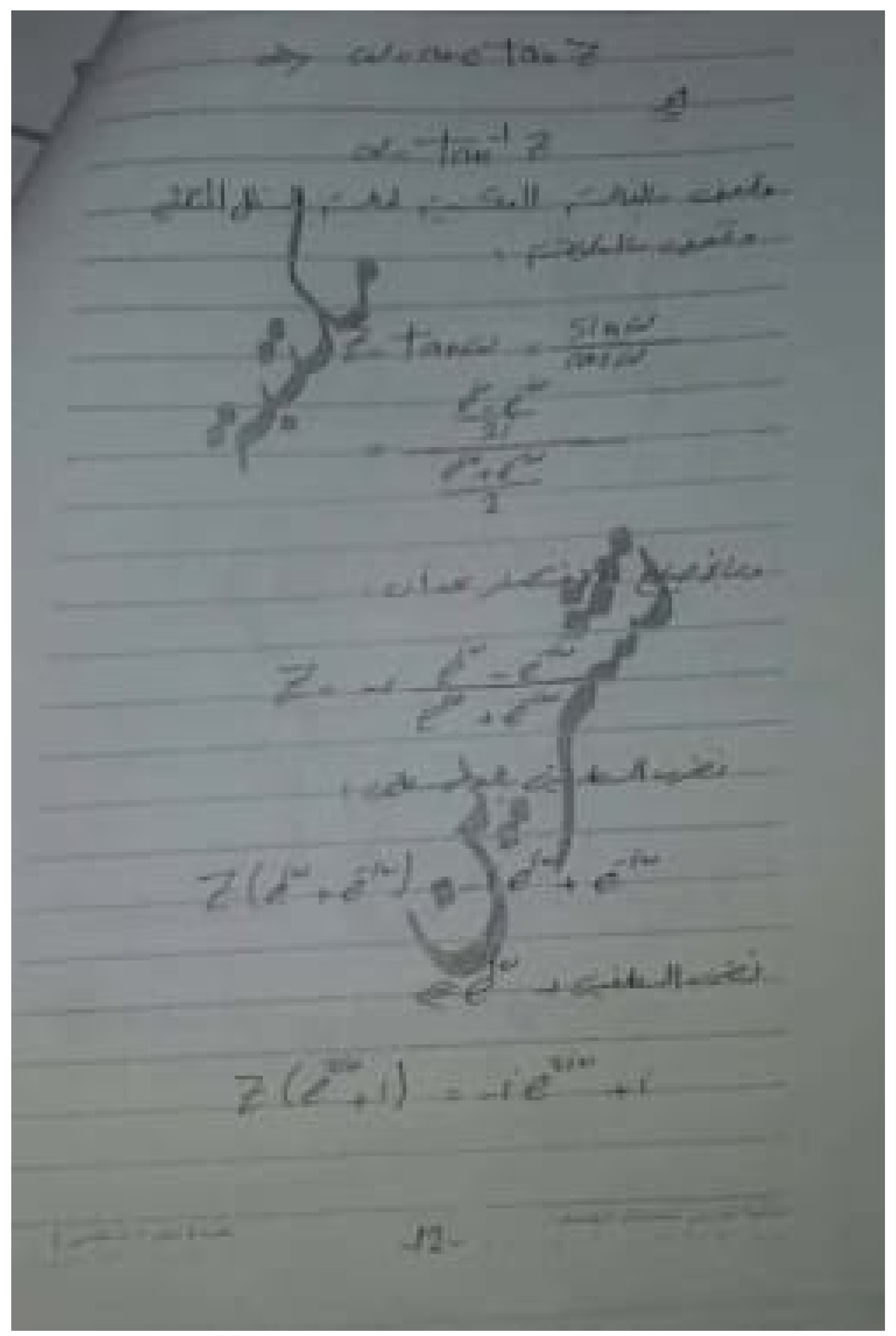
يمكن الناتج

$= 2n\pi + i\log(\sqrt{2} \mp 1)$

لكن ... $\sqrt{2}$ ...

⑤ الدالة العكسية لدالة الظل المثلثية

اذا كان $z = \tan w \Leftarrow$



→ calculate $\tan^{-1} z$

$w = \tan^{-1} z$

[illegible]

$z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w}$

$= \dfrac{\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}}{\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}}$

[illegible]

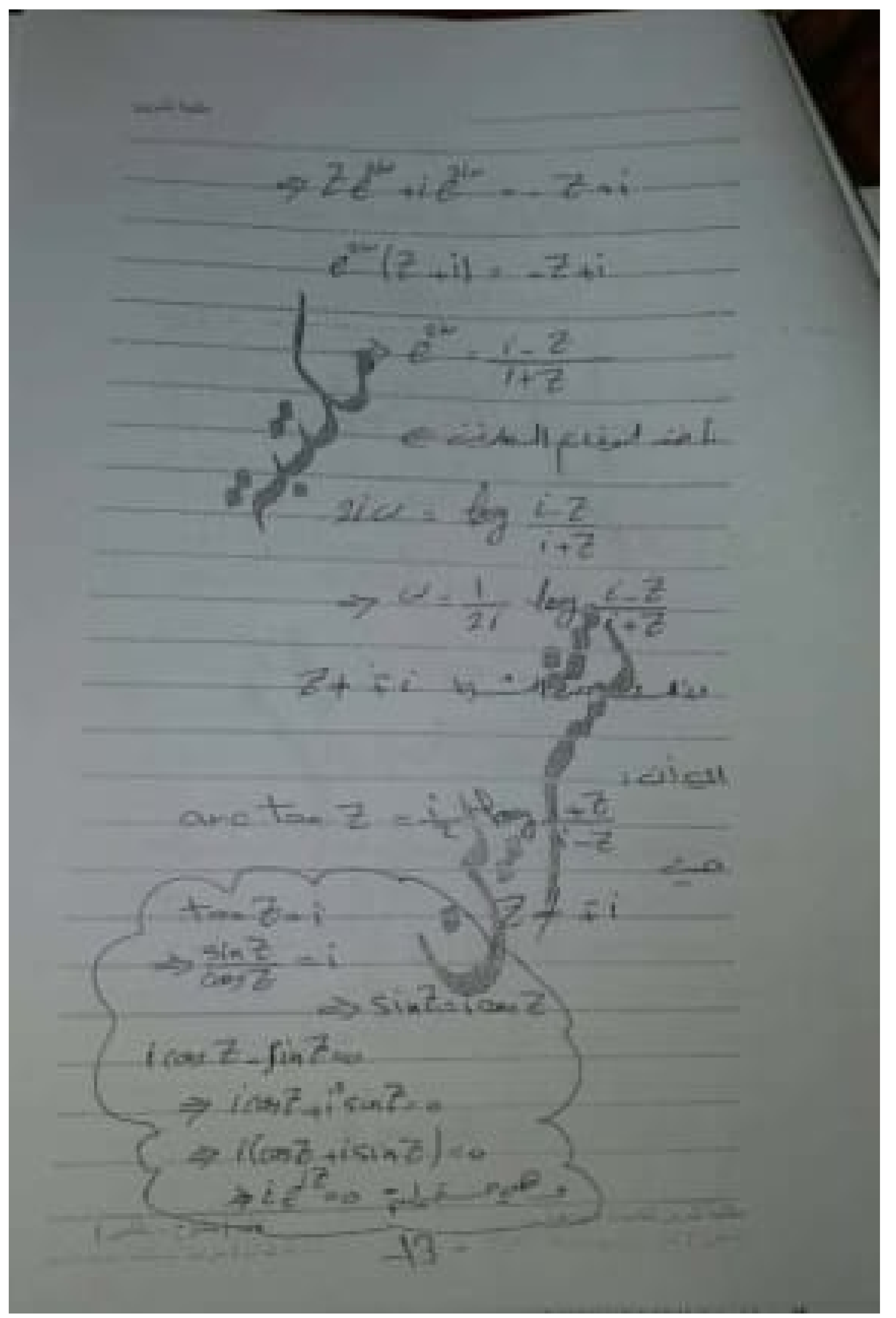
$z = -i \, \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$

[illegible]

$z(e^{iw} + e^{-iw}) = -i(e^{iw} - e^{-iw})$

[illegible]

$z(e^{2iw} + 1) = -i e^{2iw} + i$



$\Rightarrow z e^{2iw} + i e^{2iw} = -z + i$

$e^{2iw}(z + i) = -z + i$

$\Rightarrow e^{2iw} = \frac{i - z}{i + z}$

[illegible]

$2iw = \log \frac{i-z}{i+z}$

$\Rightarrow w = \frac{1}{2i} \log \frac{i-z}{i+z}$

$z \neq \pm i$ [illegible]

[illegible]:

$\arctan z = \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z}$

[illegible] $z \neq \pm i$

$\tan z = i$

$\Rightarrow \frac{\sin z}{\cos z} = i$

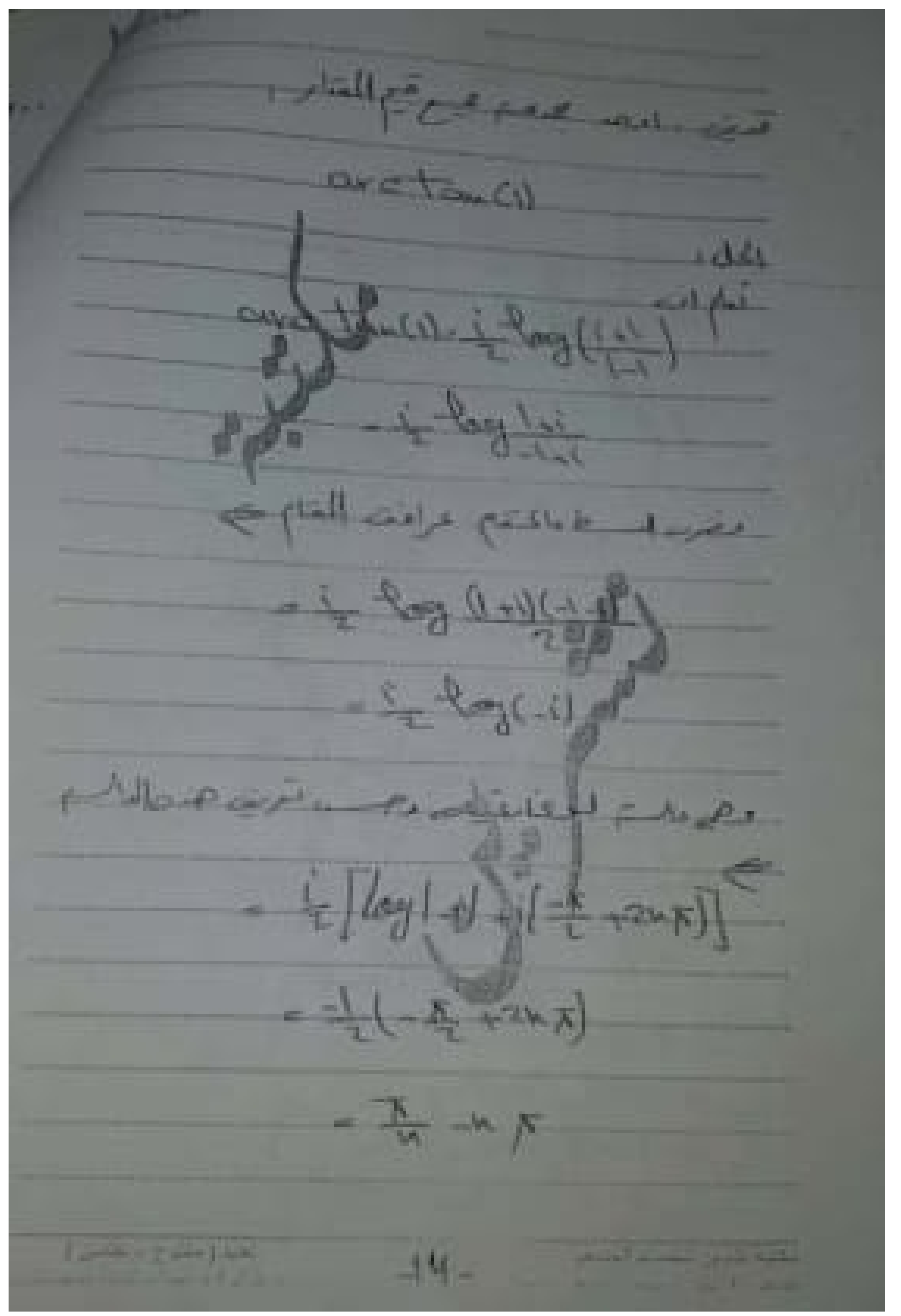
$\Rightarrow \sin z = i \cos z$

$i \cos z - \sin z = 0$

$\Rightarrow i \cos z + i^2 \sin z = 0$

$\Rightarrow i(\cos z + i \sin z) = 0$

$\Rightarrow i e^{iz} = 0$ [illegible]



مثال: أوجد جميع قيم المقدار

$\arctan(1)$

الحل:

نعلم أن

$$\arctan(1) = \frac{i}{2}\log\left(\frac{i+1}{i-1}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\log\frac{1+i}{-1+i}$$

بضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$$= \frac{i}{2}\log\frac{(1+i)(-1-i)}{2}$$

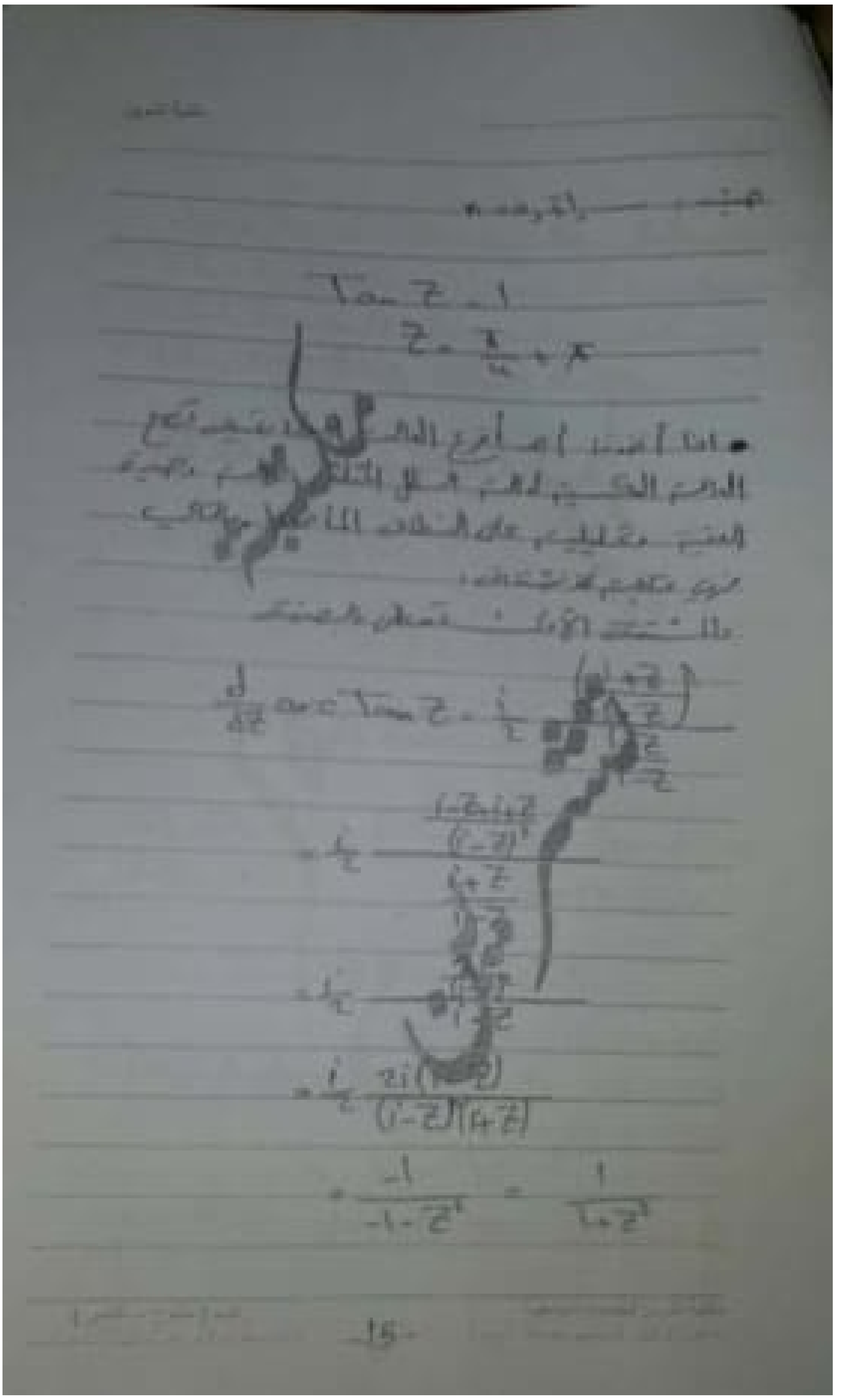
$$= \frac{i}{2}\log(-i)$$

ومن تعريف ...

$$= \frac{i}{2}\left[\log|-i| + i\left(\frac{-\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - n\pi$$



[illegible]

$\tan z = 1$

$z = \frac{\pi}{4} + \pi$

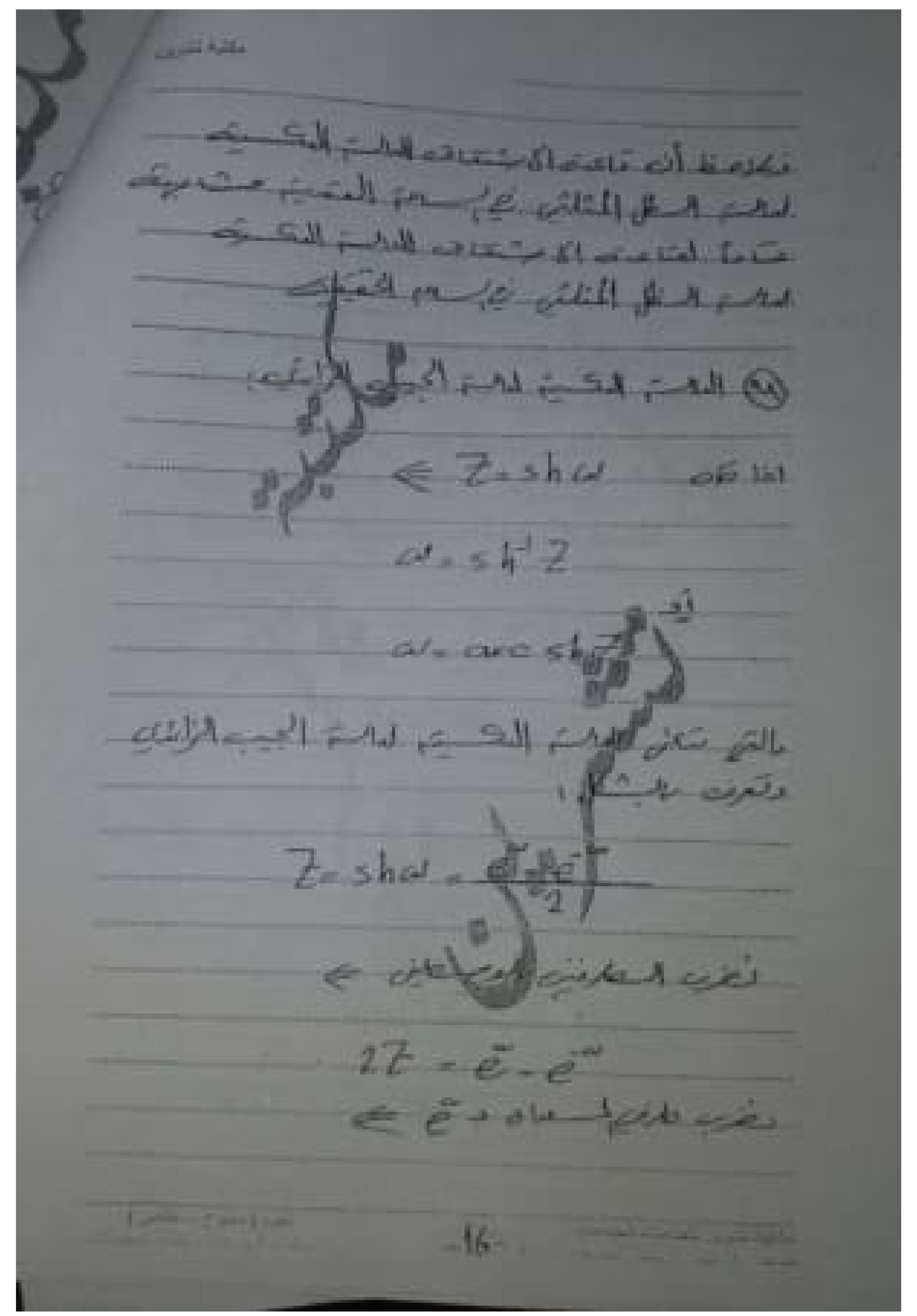
[illegible]

$$\frac{d}{dz} \arctan z = \frac{i}{2} \frac{\left(\frac{i+z}{i-z}\right)'}{\frac{i+z}{i-z}}$$

$$= \frac{i}{2} \frac{\frac{(i-z)+(i+z)}{(i-z)^2}}{\frac{i+z}{i-z}}$$

$$= \frac{i}{2} \frac{2i}{(i-z)(i+z)}$$

$$= \frac{-1}{-1-z^2} = \frac{1}{1+z^2}$$



نلاحظ أن قاعدة الاشتقاق للدالة العكسية
لمعكوس الظل الزائدي هي نفسها المستخدمة عند معكوس
تماما لقاعدة الاشتقاق للدالة العكسية
لمعكوس الظل الزائدي هي نفسها المعكوس

(٩) المعكوس العكسية لدالة الجيب الزائدي

اذا كان $z = \sinh w \Rightarrow$

$w = \sinh^{-1} z$

أي

$w = \text{arc}\sinh z$

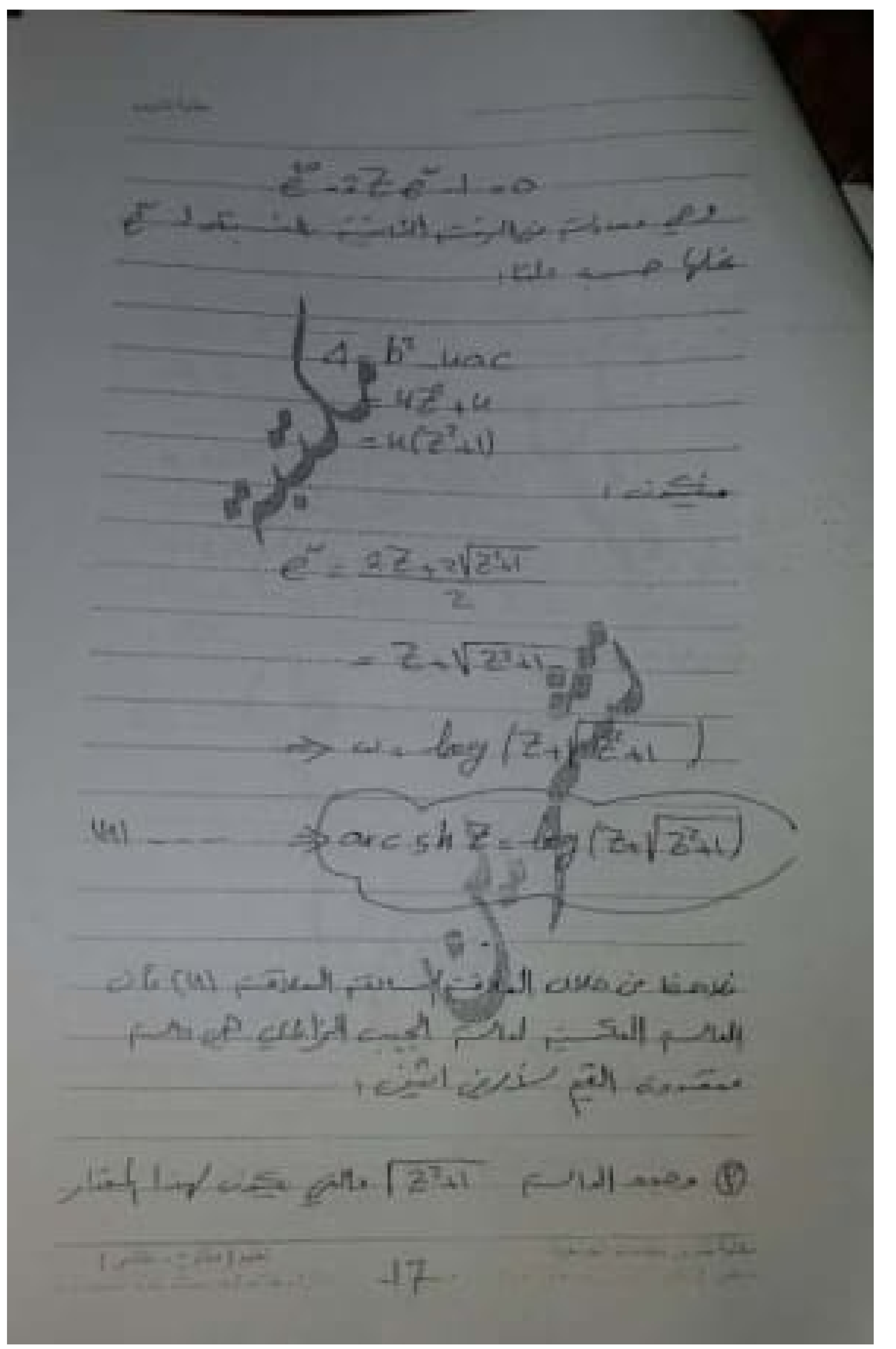
فإنه تكون الدالة العكسية لدالة الجيب الزائدي
وتعرف بالشكل:

$$z = \sinh w = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2}$$

نضرب الطرفين في 2 $\Leftarrow$

$$2z = e^{w} - e^{-w}$$

نضرب طرفي المعادلة في e^{w} $\Leftarrow$



$$e^{2u} - 2z\,e^{u} - 1 = 0$$

هي معادلة من الرتبة الثانية بالنسبة لـ e^{u}
نحلها حسب دلتا:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4z^2 + 4 = 4(z^2+1)$$

ومنه:

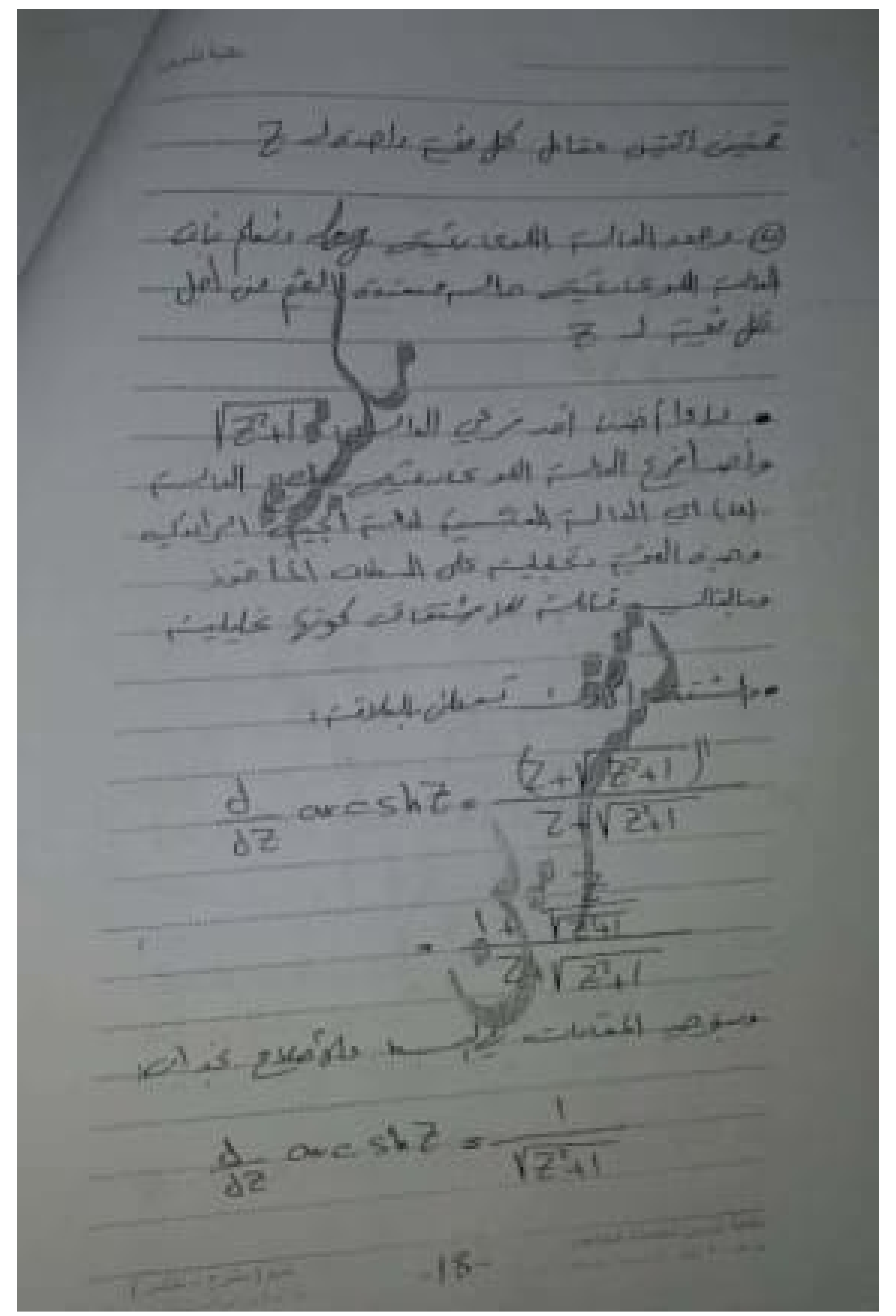
$$e^{u} = \frac{2z + 2\sqrt{z^2+1}}{2} = z + \sqrt{z^2+1}$$

$$\Rightarrow u = \log\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsh} z = \log\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) \quad \text{---- (19)}$$

نلاحظ من خلال العلاقة السابقة (19) أن الدالة العكسية لدالة الجيب الزائدي هي دالة متعددة القيم بسبب الجذر.

③ فرع الدالة $\sqrt{z^2+1}$ والتي يمكن لها أن تختار



[illegible] التحليلية [illegible] لكل قيم [illegible] z

③ من تعريف الدالة العكسية [illegible] log [illegible]
الدالة [illegible] [illegible] [illegible]
لكل قيم z

• [illegible] $\sqrt{z^2+1}$
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

• [illegible] :

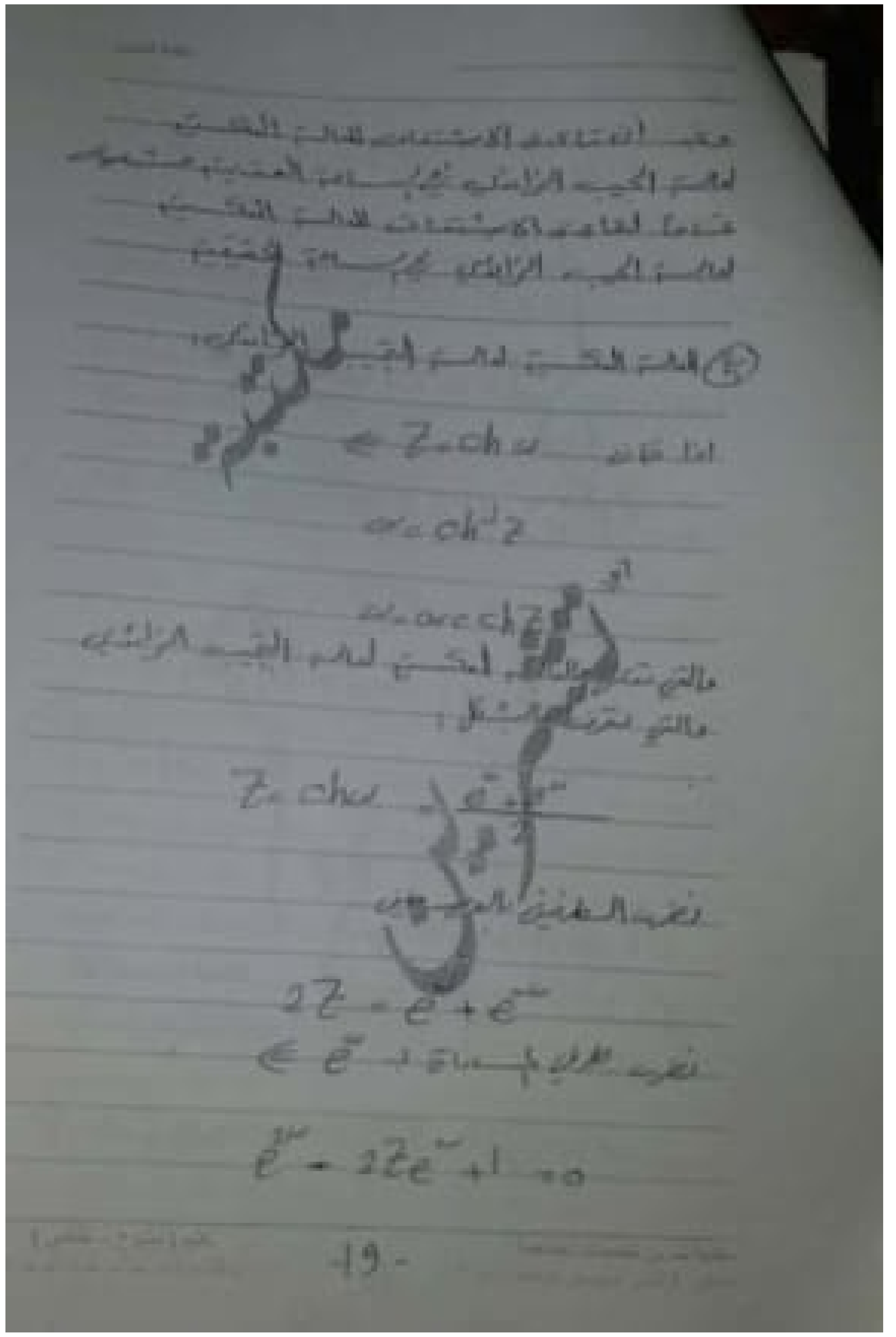
$$\frac{d}{dz}\operatorname{arcsh} z = \frac{\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)'}{z+\sqrt{z^2+1}}$$

$$= \frac{1+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}}{z+\sqrt{z^2+1}}$$

[illegible]

[illegible]

$$\frac{d}{dz}\operatorname{arcsh} z = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$$



[illegible]

3) الدالة العكسية لدالة الجيب تمام الزائدي:

اذا كانت $z = \text{ch}\, w \Leftarrow$

$w = \text{ch}^{-1} z$

أو

$w = \text{arc ch}\, z$

والتي تسمى الدالة العكسية لدالة الجيب تمام الزائدي

والتي تعرف بالشكل:

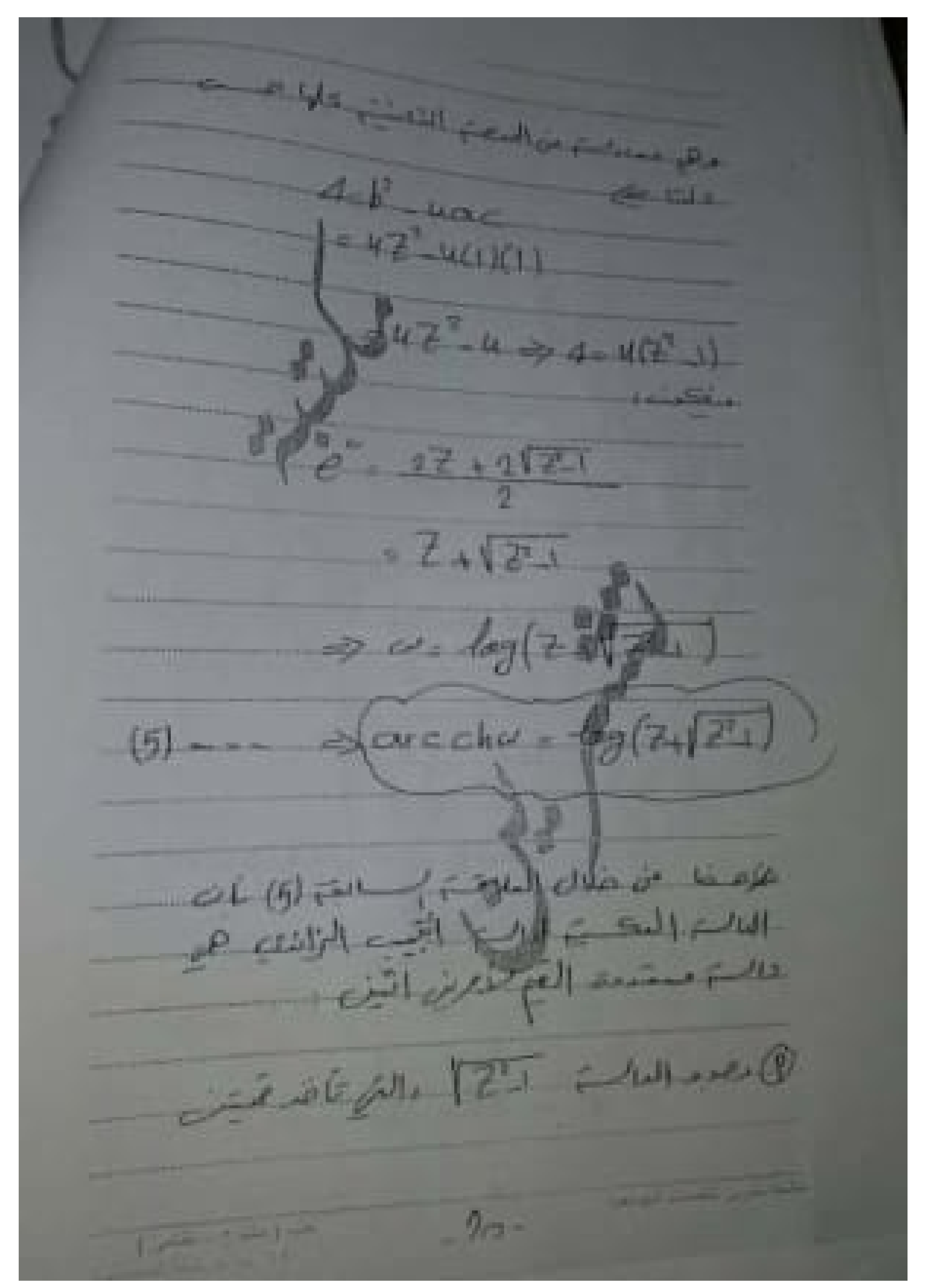
$z = \text{ch}\, w = \frac{e^{w} + e^{-w}}{2}$

نضرب الطرفين بـ 2

$2z = e^{w} + e^{-w}$

نضرب الطرفين بـ $e^{w} \Leftarrow$

$e^{2w} - 2z e^{w} + 1 = 0$



وهي معادلة من الدرجة الثانية

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4z^2 - 4(1)(1)$

$= 4z^2 - 4 \Rightarrow \Delta = 4(z^2 - 1)$

$e^{w} = \frac{2z + 2\sqrt{z^2-1}}{2}$

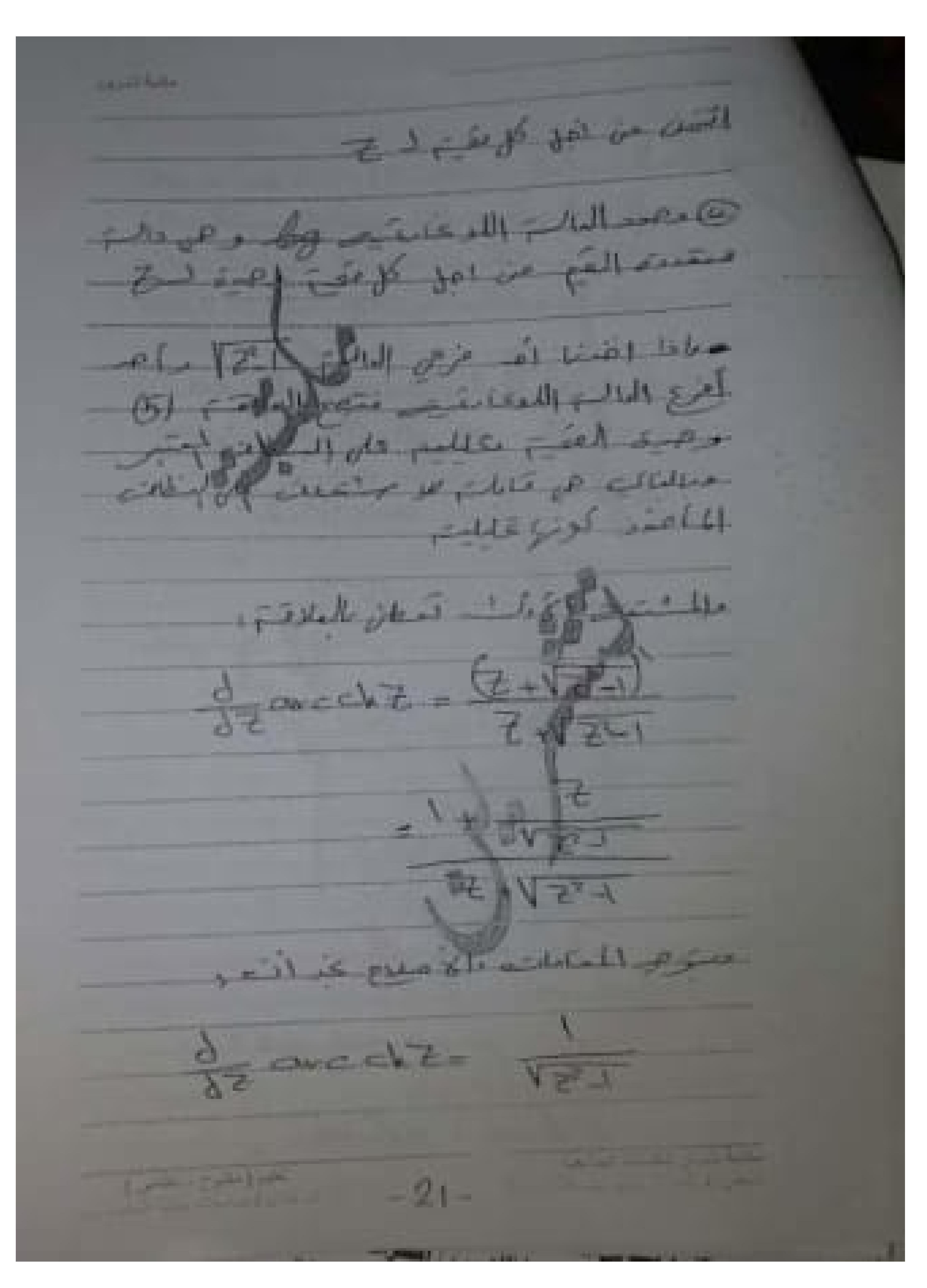
$= z + \sqrt{z^2-1}$

$\Rightarrow w = \log(z + \sqrt{z^2-1})$

(5) ---- $\Rightarrow \operatorname{arccosh} w = \log(z + \sqrt{z^2-1})$

نلاحظ من خلال العلاقة (5) ان الدالة العكسية للجيب الزائدي هي دالة متعددة القيم

③ نعرف الدالة $\sqrt{z^2-1}$ والتي تأخذ قيمتين



التحليلي من أجل كل قيمة لـ z

⑤ مجموعة الدالة اللوغاريتمية ... وهي دالة متعددة القيم من أجل كل قيمة لـ z

ملاحظة: أضفنا أن فرعي الدالة $\sqrt{z^2-1}$ ... أفرع الدالة اللوغاريتمية ... (5) وحيدة القيمة تحليلية على المستوى ...
[illegible]
الماخوذ كونها تحليلية

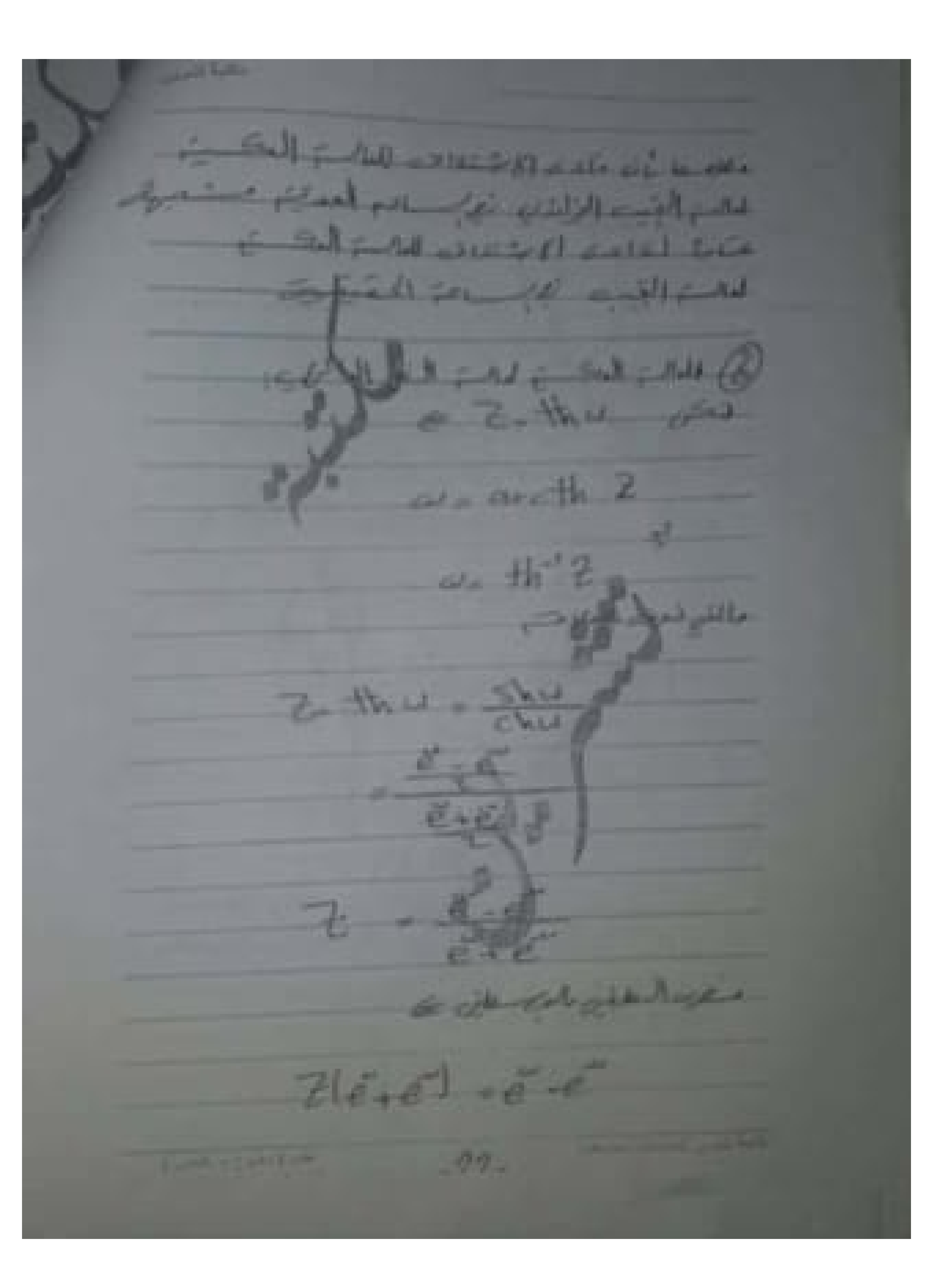
ملاحظة: ... تعطى بالعلاقة:

$$\frac{d}{dz}\operatorname{arccosh} z = \frac{z+\sqrt{z^2-1}}{z\sqrt{z^2-1}}$$

$$= \frac{1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}}{z+\sqrt{z^2-1}}$$

[illegible]

$$\frac{d}{dz}\operatorname{arccosh} z = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$$



ملاحظة: إن مشتقات الدوال الزائدية العكسية للدوال الحقيقية الزائدية تم إيجادها بصورة مشابهة تماماً لمشتقات الدوال المثلثية العكسية للدوال الحقيقية بإيجاد المشتقة

② الدالة العكسية لدالة الظل الزائدية

نفرض $z = \tanh w$

$w = \operatorname{arcth} z$

أو

$w = th^{-1} z$

بالتعويض

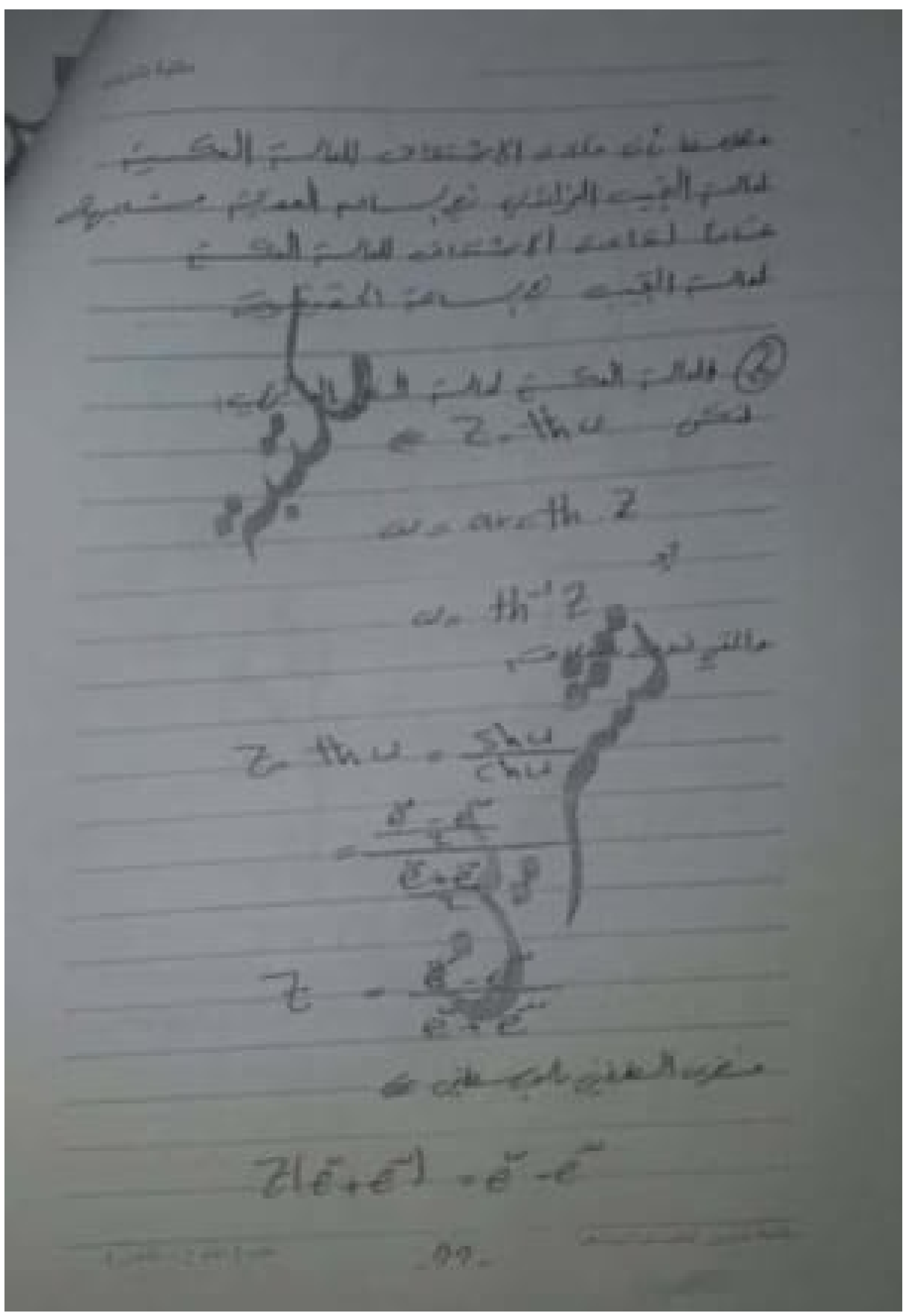
$$z = \tanh w = \frac{\sinh w}{\cosh w}$$

$$= \frac{\frac{e^{w} - e^{-w}}{2}}{\frac{e^{w} + e^{-w}}{2}}$$

$$z = \frac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}}$$

بضرب الطرفين بالمقام

$$z(e^{w} + e^{-w}) = e^{w} - e^{-w}$$



ملاحظة أن علاقة الاشتقاق للدالة العكسية لدالة الجيب الزائدي تم حسابها بعد إثبات مستعينين بقاعدة الاشتقاق للدالة العكسية لدالة الجيب بصيغة المشتقة

(2) الدالة العكسية لدالة الظل الزائدي

نضع $z = \text{th}\, w$ ⟸

$w = \text{arcth}\, z$

أو

$w = \text{th}^{-1} z$

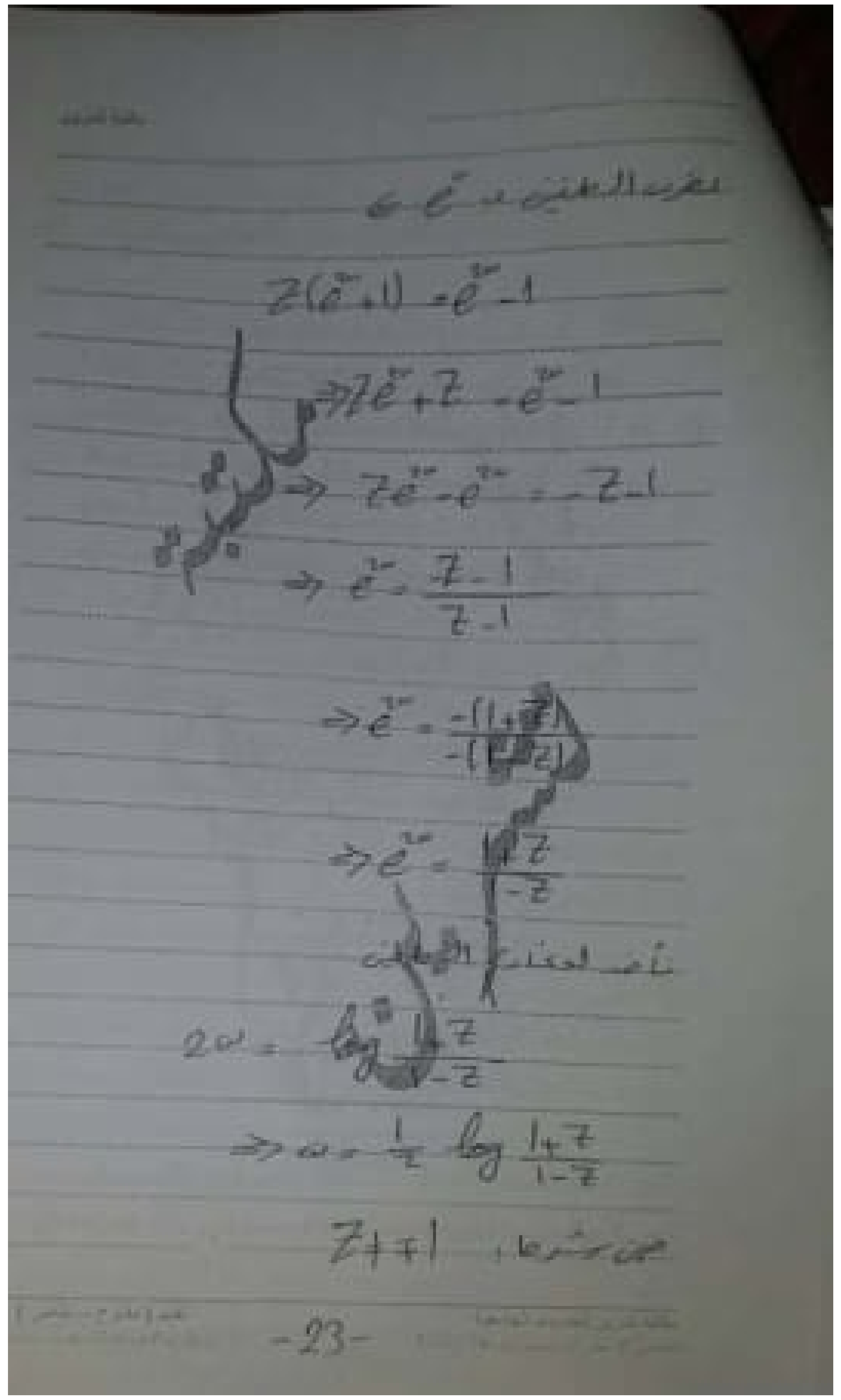
بالتعريف

$$z = \text{th}\, w = \frac{\text{sh}\, w}{\text{ch}\, w} = \frac{\frac{e^{w} - e^{-w}}{2}}{\frac{e^{w} + e^{-w}}{2}}$$

$$z = \frac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}}$$

نضرب الطرفين بـ

$$z\left(e^{w} + e^{-w}\right) = e^{w} - e^{-w}$$



$$z(e^{2w}+1) = e^{2w}-1$$

$$\Rightarrow ze^{2w}+z = e^{2w}-1$$

$$\Rightarrow ze^{2w}-e^{2w} = -z-1$$

$$\Rightarrow e^{2w} = \frac{-z-1}{z-1}$$

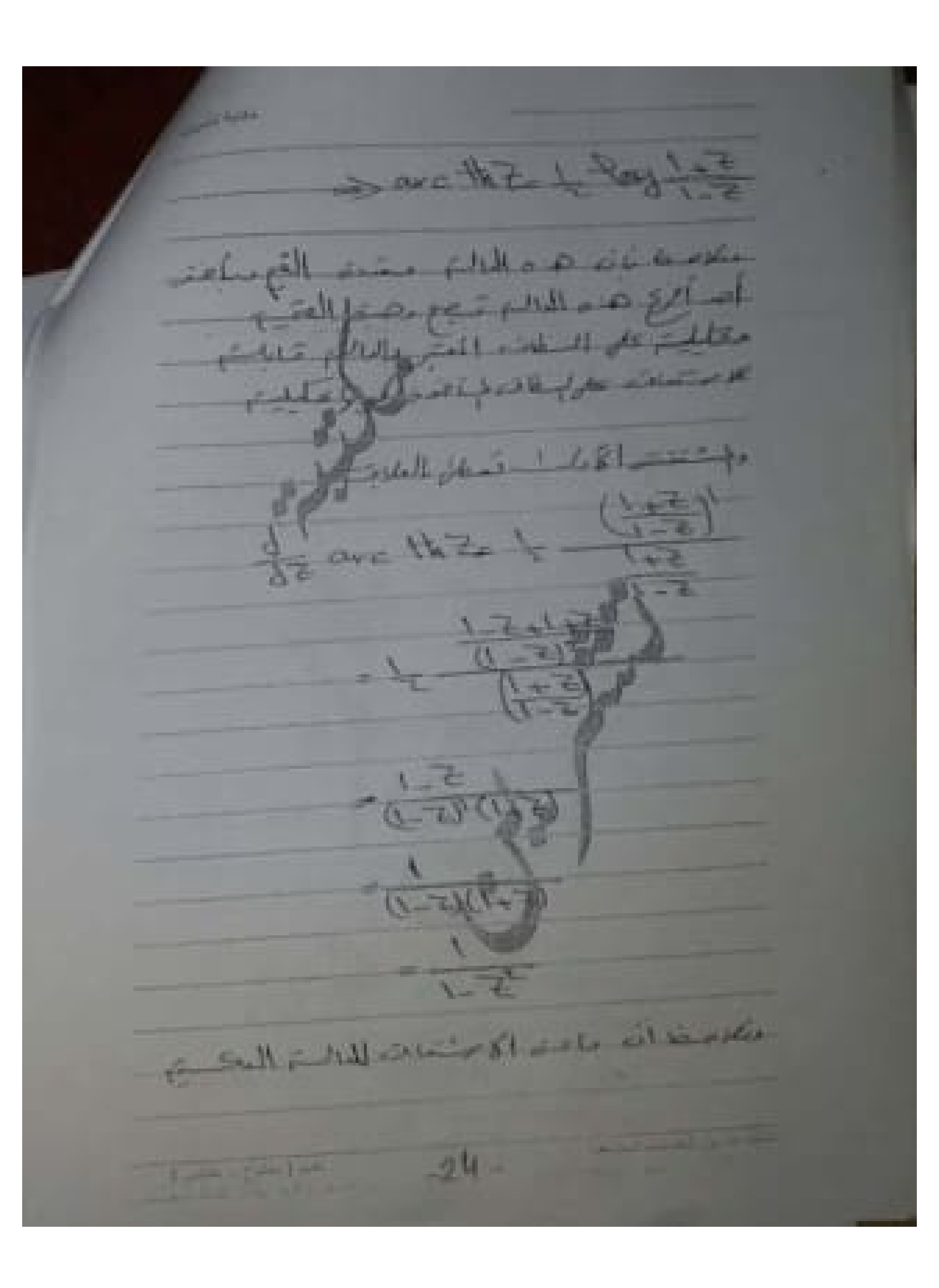
$$\Rightarrow e^{2w} = \frac{-(1+z)}{-(1-z)}$$

$$\Rightarrow e^{2w} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$2w = \log \frac{1+z}{1-z}$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$$

$z \neq \mp 1$



$$\Rightarrow \operatorname{arc\,th} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$$

ملاحظة بأن هذه الدالة متعددة القيم [illegible]
أصل فرع هذه الدالة [illegible] القيم
[illegible] على النقطة [illegible] الدالة [illegible]
[illegible]

مشتقة الدالة : تمثل العلاقة

$$\frac{d}{dz} \operatorname{arc\,th} z = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)'}{\frac{1+z}{1-z}}$$

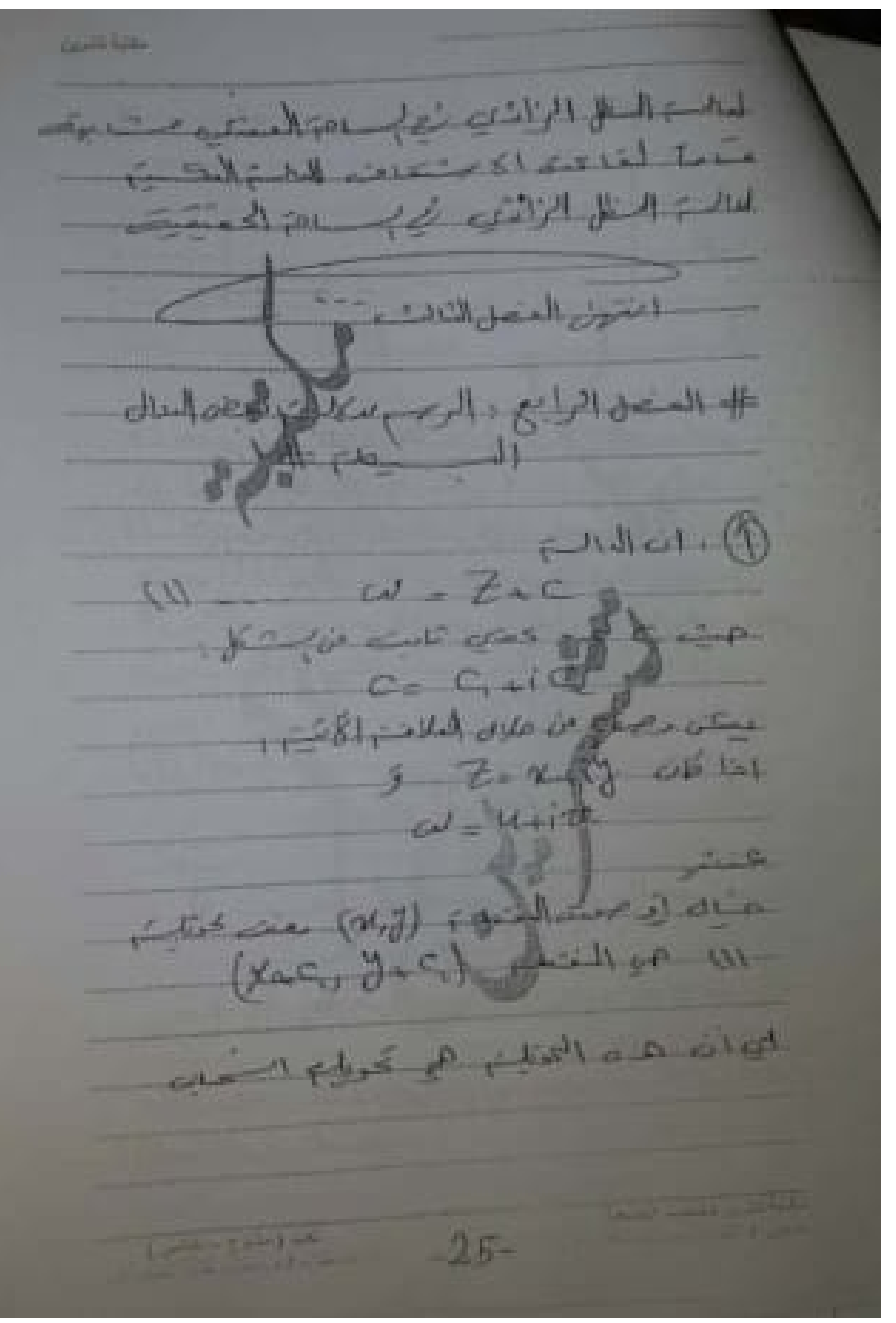
$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{1-z+1+z}{(1-z)^2}}{\frac{1+z}{1-z}}$$

$$= \frac{1-z}{(1-z)^2(1+z)}$$

$$= \frac{1}{(1-z)(1+z)}$$

$$= \frac{1}{1-z^2}$$

نلاحظ أن [illegible] الاشتقاق للدالة العكسية



لدالة الشكل الرباعي في المساحة المستوية حيث يوضح
منها للقاعدة الكسر الدالة التحليلية
لدالة الشكل الرباعي في المساحة الحقيقية

~~المحور الفصل الثالث~~

الفصل الرابع : الرسم بالتحويلات المتعلقة بالمستوى المركب

(1) : الدالة

$$w = z + c \quad \text{---} \quad (1)$$

حيث c عدد ثابت من الشكل :

$$c = c_1 + i c_2$$

يمكن وصفها من خلال العلاقات الآتية :

اذا كان $z = x + iy$ و

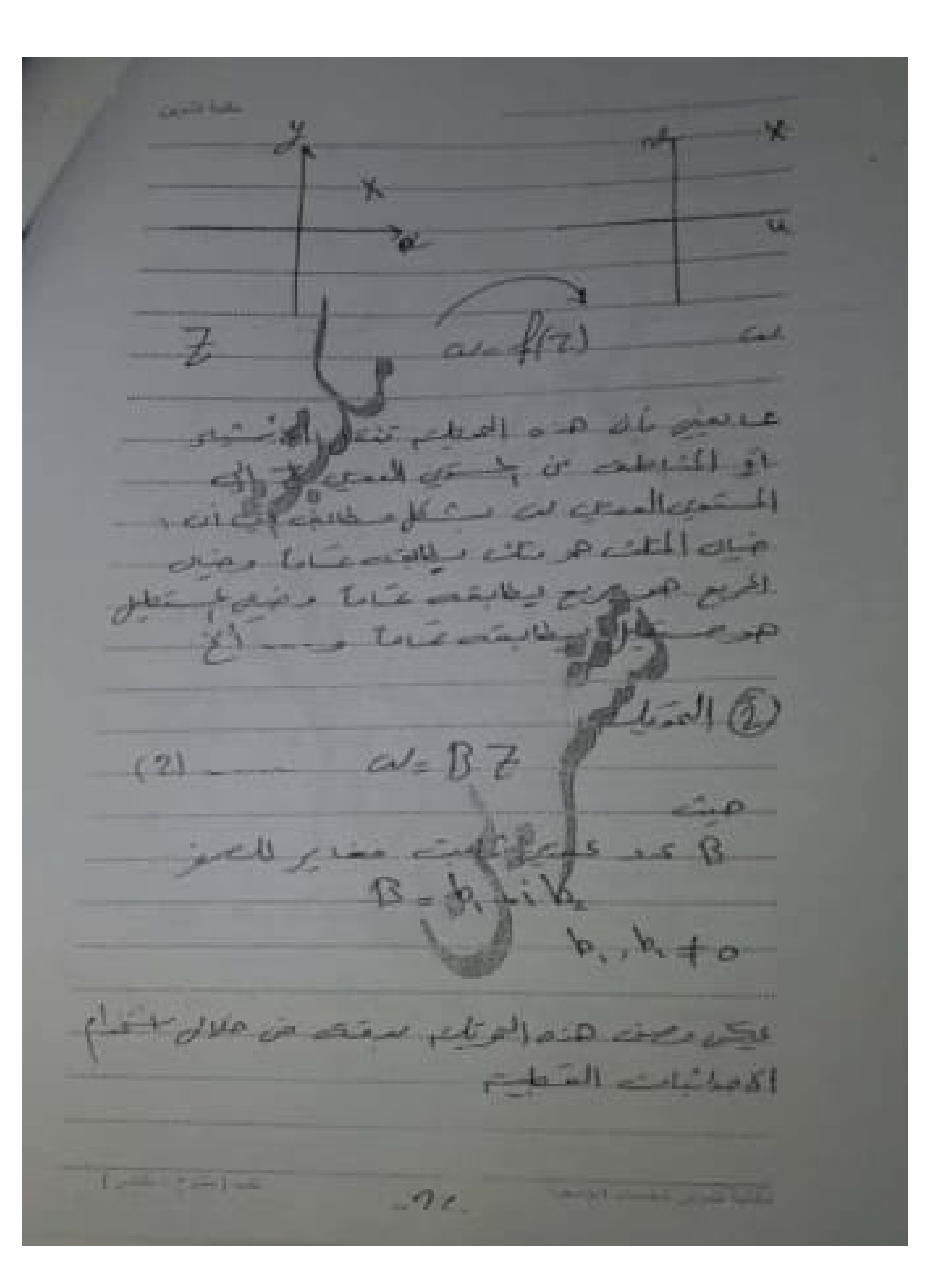
$$w = u + iv$$

فنعتبر

فإن أي نقطة في المستوى (x, y) تمثل مكانها

(1) هي النقطة $(x + c_1, y + c_2)$

أي أن هذه التحويلة هي تحويلة الانسحاب



$w = f(z)$

مما يعني بأن هذه التحويلات تنقل الأشكال أو المناطق من المستوي Z إلى المستوي W بنفس الشكل أي أن مثيل المثلث هو مثلث يطابقه تماما ومثيل المربع هو مربع يطابقه تماما ومثيل المستطيل هو مستطيل يطابقه تماما و ... الخ

② التحويل

$w = BZ$ ———— (2)

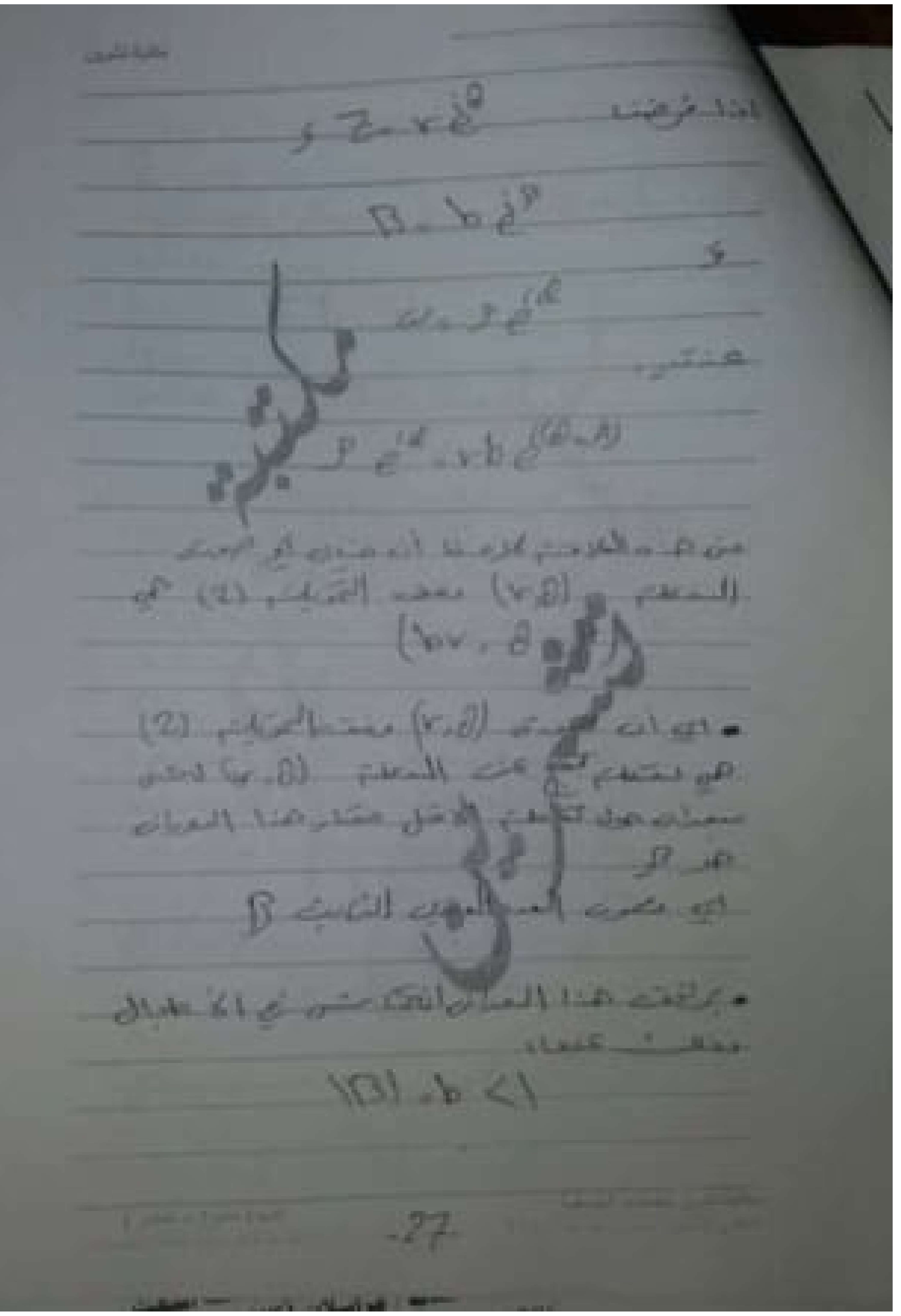
حيث

B عدد مركب ثابت مغاير للصفر

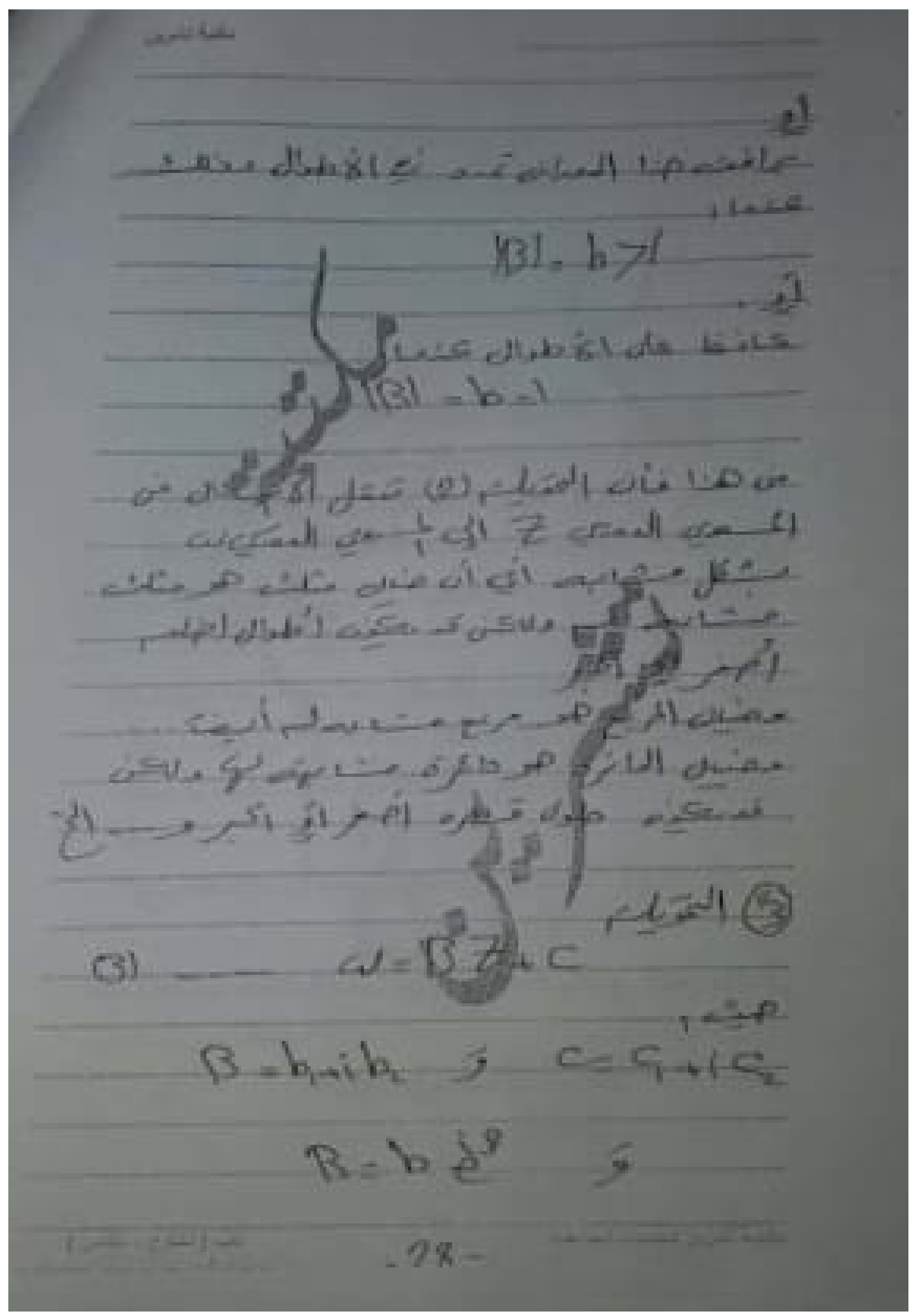
$B = b_1 + i b_2$

$b_1 , b_2 \neq 0$

يمكن وصف هذه التحويلات بدقة من خلال الإحداثيات القطبية



إذا فرضنا
عنصر
من هذه الفروض لاحظنا أنه
المعتم (٣×٥)
• أنه
عمل
• ان هذا
١٥١ . ط ٢١



ج)

تحافظ هذا التحويل تمدد في الأطوال معامله

|3| . k

د)

تحافظ على الأطوال تمدد

ا ـ ط = |3|

من هنا فإن التحويل (2) تنقل الأشكال من المستوى المركب z إلى المستوى المركب w بشكل متشابه أي أن صورة مثلث هو مثلث متشابه له ولكن لا تحافظ على الأطوال

صورة المربع هو مربع متشابه له أيضا صورة الدائرة هي دائرة مشابهة لها ولكن تختلف طول قطرها أصغر أو أكبر ...

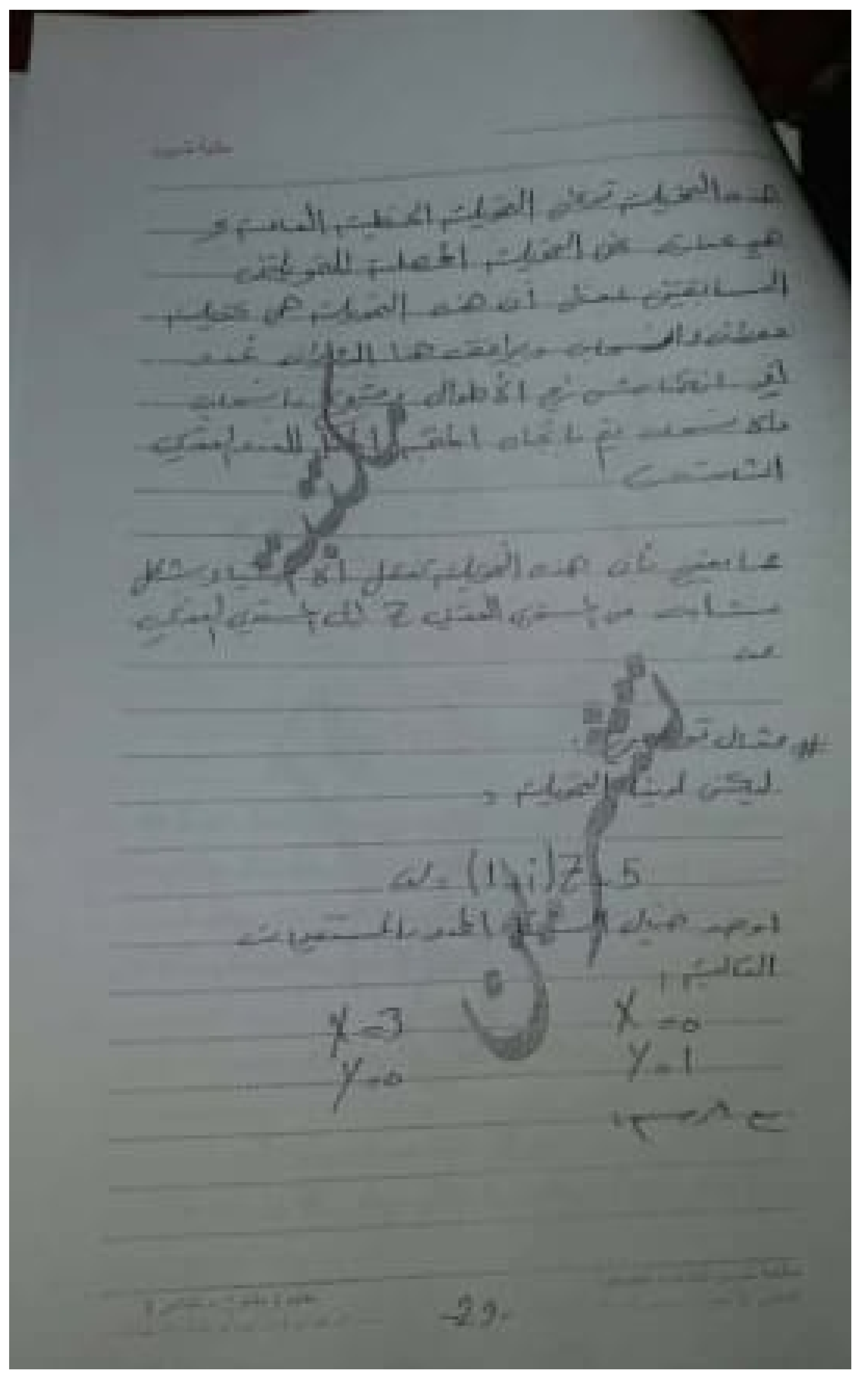
(3) التحويل

(3) ____ $w = B\bar{z} + C$

حيث

$B = b_1 + ib_2$ و $C = c_1 + ic_2$

$B = b e^{i\theta}$ و



هذه العمليات تسمى العمليات الخطية [illegible]
هي عبارة عن العمليات الخطية للمرحلتين
السابقتين بمعنى أن هذه العمليات هي تحليل
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible]
[illegible]

مثال توضيحي:
ليكن لدينا العمليات

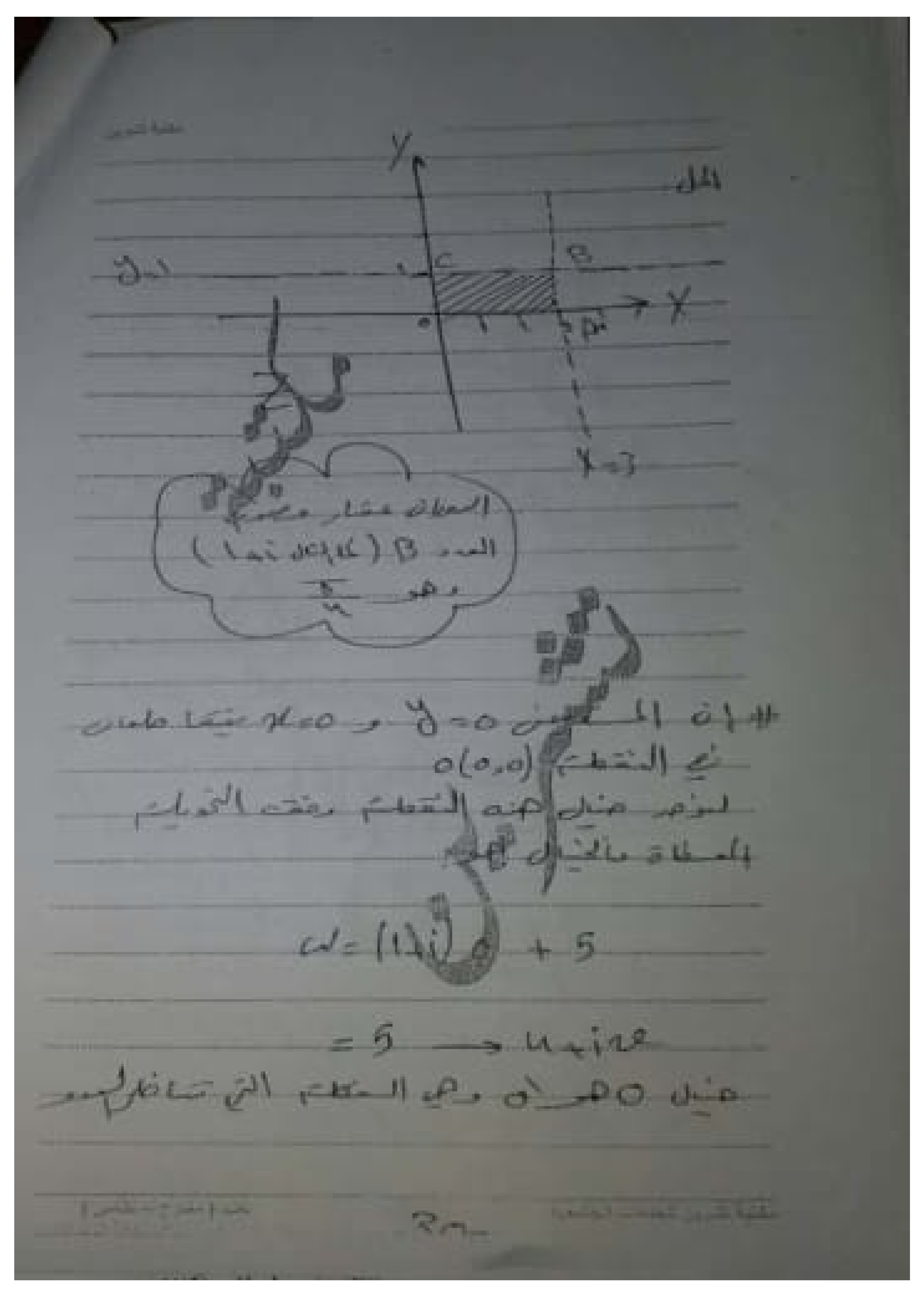
$5 = Z(i, 1) =$ [illegible]

أوجد [illegible]
التالية:

$X = 0$
$Y = 1$

$X = 3$
$Y = 0$

[illegible]



الحل

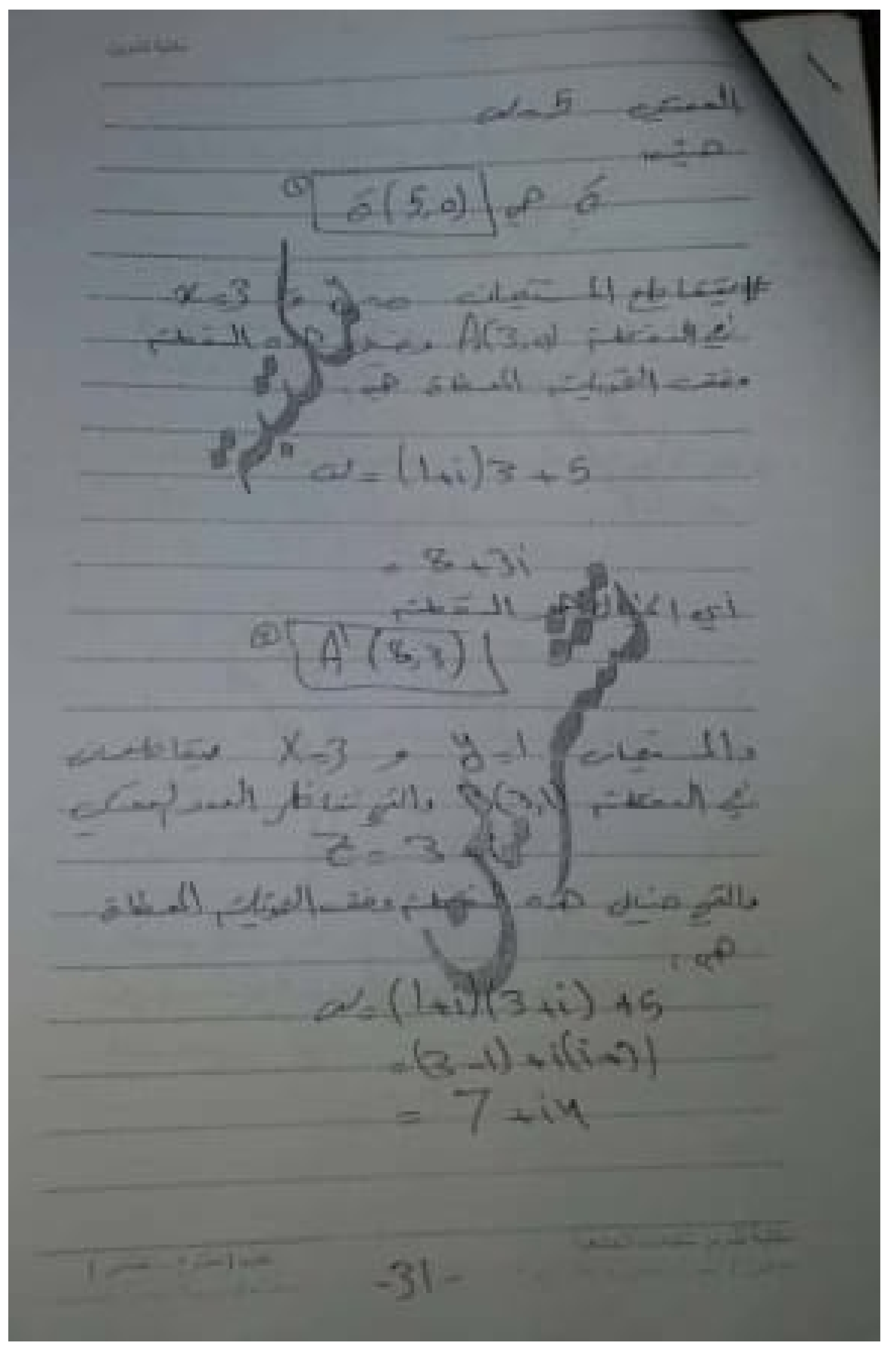
المطلوب مقدار [illegible] عند B (الداخل تماما) وهو $\frac{3}{4}$

إن المستقيمين $y=0$ و $x=0$ يتقاطعان في النقطة $O(0,0)$
لنوجد قيمة هذه النقطة بعد التعويض بالمعادلة ما يلي

$\omega = (1)(0) + 5$

$= 5 \rightarrow$ minimize

قيمة O هي 5 وهي النقطة التي تساعد ...



المستوى الثالث

حيثم

ن ص (5,0) ن ①

تقاطع المستقيمات ص=1 و x=3 في المعظم A(3,1) مع المستقيم ...

نقطة التماس المطلق هي:

$\omega = (1, i)3 + 5$

= 3 + 3

أي المعظم

A (3,3) ②

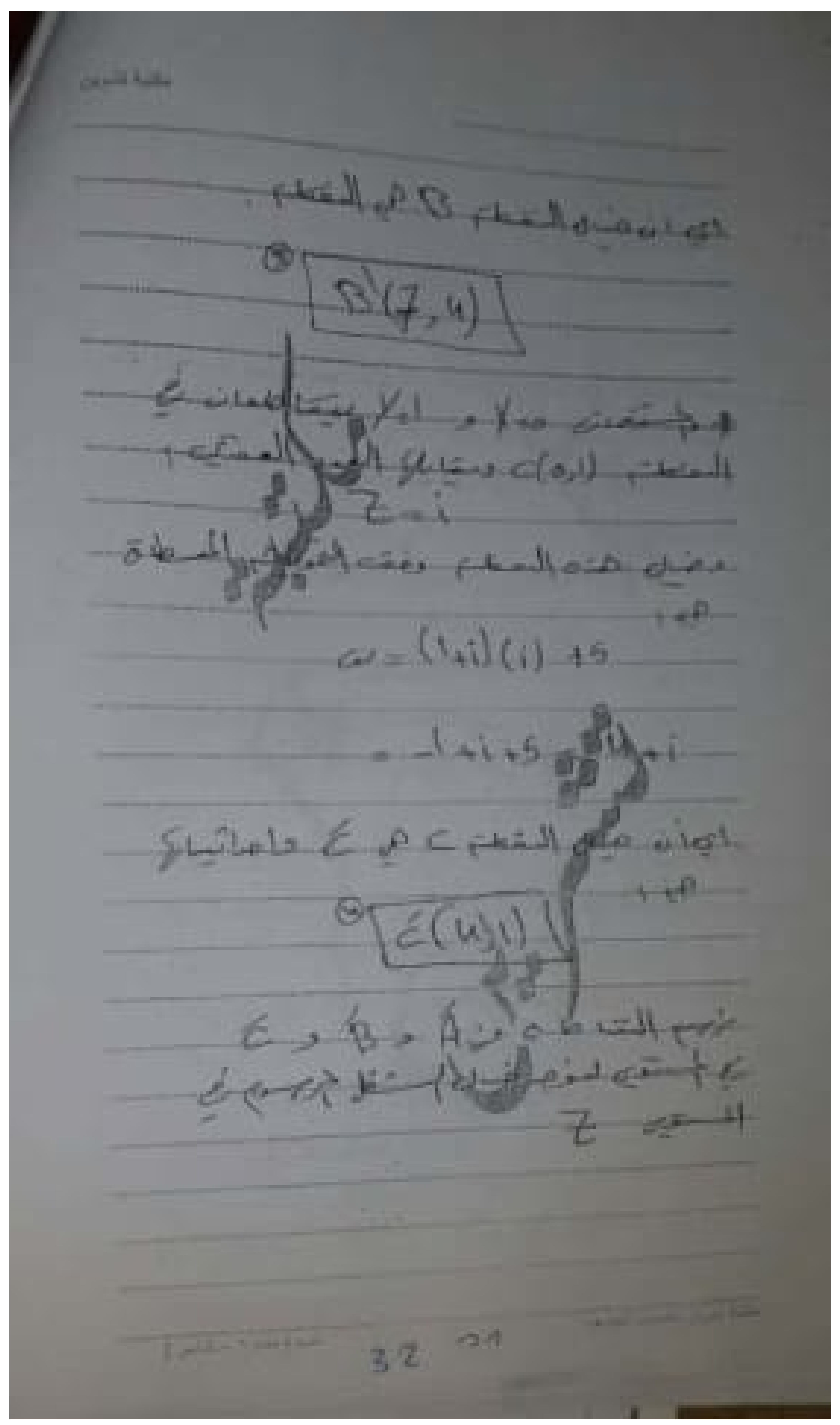
والمستقيمات y=1 و x=3 متعامدان في المعظم (1,3) والتي تناظر العدد المركب z = 3 + i

والتي تمثل ... التماس المطلق هي:

$\omega = (1 + i)(3 + i) + 5$

$= (3 - 1) + (1 + 3)i$

$= 7 + 4i$



احداثيات صورة النقطة B هي النقطة:

$B'(7,4)$

و [illegible] الاحداثيات [illegible]

النقطة $C(0,1)$ وتمثل العدد المركب $z = i$

نعوض هذه النقطة في [illegible] النقطة

هي:

$\omega = (1+i)(i) + 5$

$= i + i^2 + 5 = \ldots$

احداثيات صورة النقطة C هي E ذات الاحداثيات

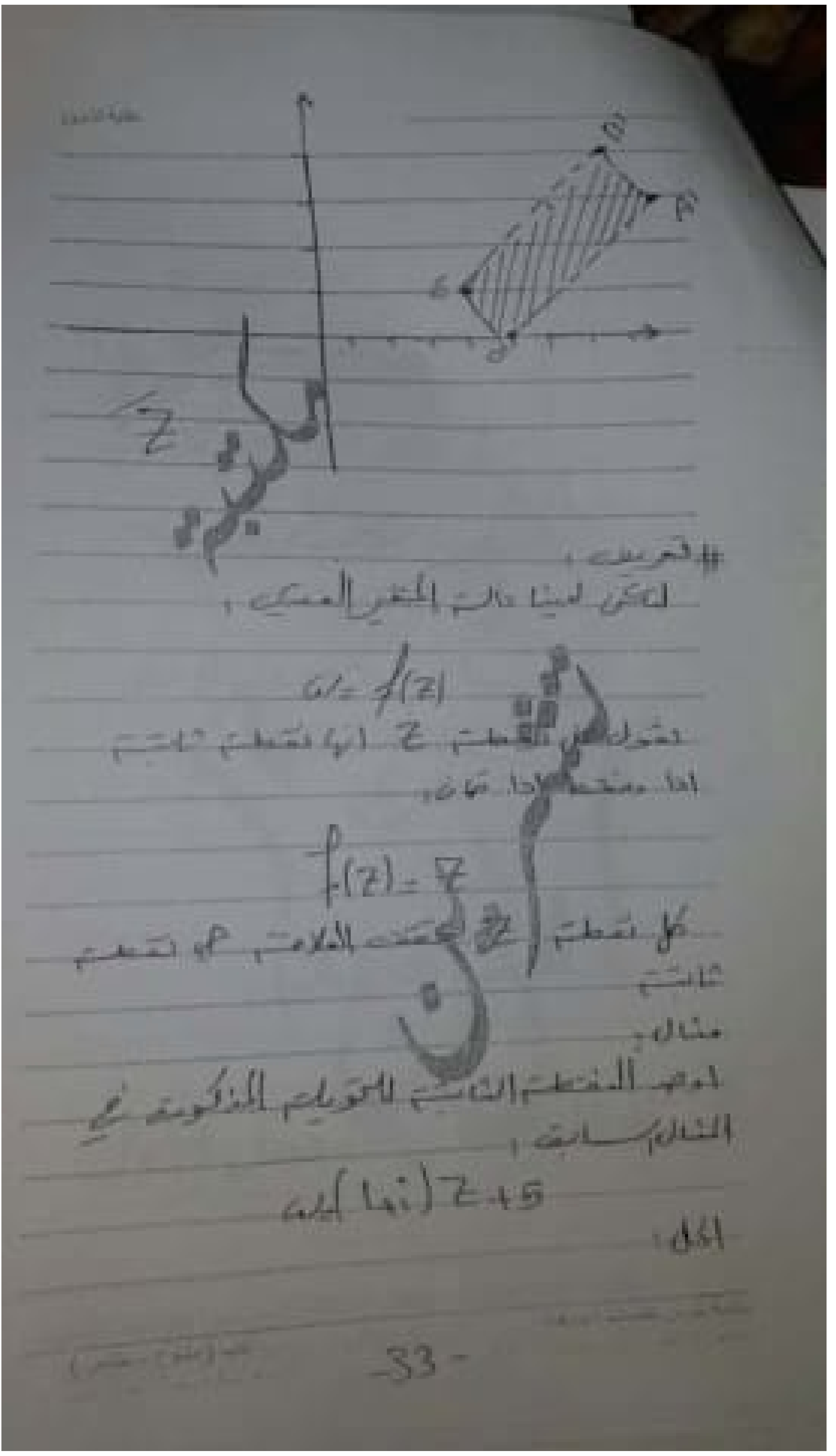
هي:

$E(4,1)$

نرسم النقاط A' و B' و E

في المستوى [illegible] الشكل [illegible]

المستوى z



التعريف :

لتكن لدينا دالة المتغير العقدي :

$$w = f(z)$$

تسمى النقطة z انها نقطة ثابتة اذا تحقق ما يأتي :

$$f(z) = z$$

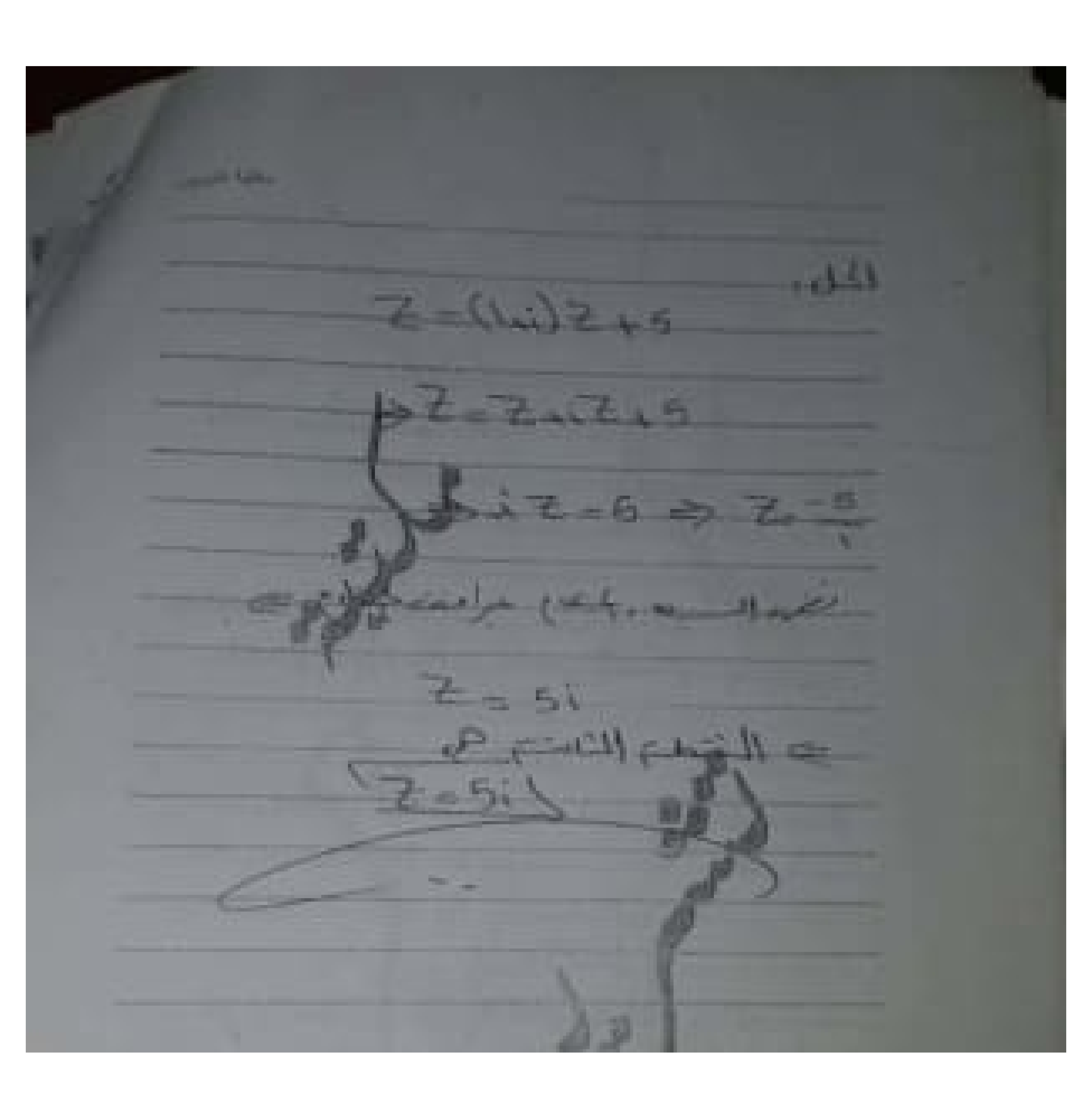
كل نقطة z تحقق العلاقة هي نقطة ثابتة

مثال :

اوجد النقطة الثابتة للتحويل المذكور في المثال السابق :

$$w = (1+i)z + 5$$

الحل :



الحل:

$Z = (1+i)Z + 5$

$\Rightarrow Z = Z + iZ + 5$

$\Rightarrow iZ = -5 \Rightarrow Z = \frac{-5}{i}$

$Z = 5i$

الشكل الناتج هو

$Z = 5i$